Naam: .... Collegekaart-nummer: ....

- Legitimatie verplicht.
- Je mag tijdens de eerste 30 minuten de tentamenzaal niet verlaten.
- Op de tafel: legitimatie, tentamenvel, schrijfgerei, A4tje met aantekeningen, eten, drinken.
- Niet op de tafel: al het overige. (Eigen kladpapier, etui, dictaat, slides, elektronische apparatuur incl. telefoon.)
- Het gebruik van markeerstiften is niet toegestaan.
- Als je naar het toilet wilt, steek danx' je vinger op om een surveillant te waarschuwen. Hij of zij zal je toestemming geven om te gaan en met je meelopen naar het toilet. Toiletbezoek is niet toegestaan tijdens het eerste en het laatste halfuur van het tentamen. Redelijkerwijs gaat de surveillant er vanuit dat je hooguit éénmaal tijdens het tentamen het toilet bezoekt.
- Het is verboden een telefoon of vergelijkbare elektronische apparaten mee naar het toilet te nemen.
- Verplicht inleveren: alle antwoordbladen, ook als ze leeg zijn.
- Niet inleveren: de opgavenbladen.
- Nadat je de tentamenzaal hebt verlaten, is het niet toegestaan je op te houden in de gangen/hal direct buiten de tentamenzaal in verband met geluidsoverlast en toiletbezoek. Je volgt de instructies van de surveillant op.

Meerkeuze antwoorden

- Bij elke vraag is steeds precies één antwoord het juiste. In enkele gevallen kunnen andere antwoorden "bijna juist" of "deels juist" zijn. In dergelijke gevallen geldt het beste antwoord.
- Antwoord in de daarvoor bestemde vakjes door een kruisje te plaatsen. Heb je je vergist, kras dan het kruisje door, en zet een kruisje in een ander vakje.
- Het is mogelijk om aan de surveillant een nieuw antwoordvel te vragen. Onze voorraad vellen is eindig, first come first serve.
- Omdat er verschillende versies van de opgaven bestaan, correspondeert de volgorde van de meerkeuzevragen opgaven niet altijd met de volgorde van de stof zoals die behandeld is in de colleges.

Succes!

	A	*B*	*C*	*D*
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				

	A	*B*	*C*	*D*
9.				
10.				
11.				
12.				
13.				
14.				
15.				
16.				

	A	*B*	*C*	*D*
17.				
18.				
19.				
20.				
21.				
22.				
23.				
24.				

Kladpapier.

Meerkeuzevragen

1. In het voorwoord en in Hoofdstuk 1 van The Computational Beauty of Nature legt Flake uit dat multi-agent systemen op drie manieren kunnen worden begrepen. Welke drie manieren zijn dat?

   (a) Systemen zien als één geheel (monisme); systemen zien als een stelsel van tegenwerkende krachten (dualisme); Het begrijpen van overgangen tussen monisme en dualisme.

   (b) Systemen begrijpen door ze te observeren (empirisme); systemen begrijpen door er over te redeneren (rationalisme); het combineren van deze twee: redeneren over observaties.

   √ Het begrijpen van de onderdelen (reductionisme); het begrijpen van het geheel, zonder te letten op de onderdelen (holisme); het begrijpen van de interactiepatronen tussen de onderdelen.

   (d) Het begrijpen van individueel gedrag; het begrijpen van endogene invloeden; het begrijpen van exogene invloeden.

   Toelichting. "In many ways, this whole debate is a prime example of the reductionism versus holism conflict. But both extremes seem to be missing something. "

   Even verderop: "We can take a purely reductionist approach and attempt to understand things through dissection. We also can take a wider view and attempt to understand whole collections at once by observing how many agents, say the neurons in a brain, form a global pattern, such as human intelligence. Or we can take an intermediate view and focus attention on the interactions of agents. Through this middle path, the interactions of agents can be seen to form the glue that binds one level of understanding to the next level."

2. Geef de kardinaliteit van de uitkomstenruimte van de volgende experimenten.

   i) Een onbepaald eindig aantal keer een dobbelsteen werpen.

   ii) Herhaaldelijk een dobbelsteen werpen, totdat een zes verschijnt.

   (a) *i)*: $|\mathbb{N}|$; *ii)*: $|\mathbb{N}|$.

   √ *i)*: $|\mathbb{N}|$; *ii)*: $|\mathbb{R}|$.

   (c) *i)*: $|\mathbb{R}|$; *ii)*: $|\mathbb{N}|$.

   (d) *i)*: $|\mathbb{R}|$; *ii)*: $|\mathbb{R}|$.

   Toelichting. *i)* betreft alle eindige rijtjes met elementen uit $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Die verzameling is aftelbaar oneindig, dus gelijkmachtig met $\mathbb{N}$.

   ii) betreft alle eindige rijtjes met elementen uit $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, afgesloten met een 6, en ook nog alle oneindige rijtjes met elementen uit $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. De laatste verzameling is overaftelbaar, preciezer, gelijkmachtig met $\mathbb{R}$. (Dat laatste moet dan eigenlijk nog worden aangetoond met een bi-jectie, maar dat wordt verder niet gevraagd, en is op zich al snel in te zien.)

3. We beschouwen het volgende experiment: net zo lang een dobbelsteen werpen totdat een zes verschijnt. Welke van de volgende uitspraken zijn waar?

   i) Het is zeker dat ooit een zes verschijnt.

   ii) De kans dat ooit een zes verschijnt is 1.

   (a) *i)* en *ii)*.

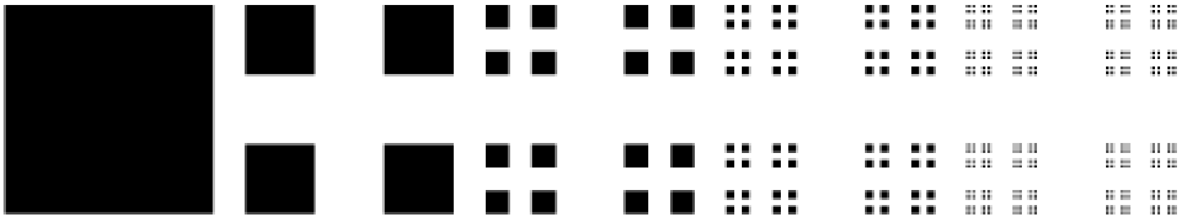
   (b) Alleen uitspraak *i)*.

   √ Alleen uitspraak *ii)*.

   (d) Geen van beide uitspraken is waar.

Toelichting. In dit experiment is het niet zeker dat ooit een zes verschijnt. Theoretisch is het mogelijk dat we alleen maar 1,2,3,4 of 5 blijven gooien. De kans dat dit gebeurt is echter nul. Dus de kans dat ooit een zes verschijnt is daarmee gelijk aan 1.

4. De kardinaliteit (niet de dimensie) van de fractal, waarvan de eerste stadia hier zijn afgebeeld



is gelijk aan

(a) overaftelbaar

(b) aftelbaar oneindig

√ $|[0.123456, 0.654321]|$

(d) $\log(4)/\log(3)$

Toelichting. De kardinaliteit van Cantor's kam is overaftelbaar, maar bevat in het eenheidsinterval $[0, 1]$, dus gelijk aan $|\mathbb{R}|$.

Analoog zal de kardinaliteit van Cantor's dust (de fractal waar het over gaat) overaftelbaar zijn. Omdat de kardinaliteit van het eenheidsvierkant ook gelijk aan $|\mathbb{R}|$ is (herinner Hilbert's curve), zal de kardinaliteit van Cantor's dust die van het eenheidsvierkant en dus van het eenheidsinterval niet overstijgen. Dus de kardinaliteit van Cantor's dust is ook gelijk aan $|\mathbb{R}|$. Het gevraagde volgt nu uit het feit dat algemeen bekend is dat stukken van $\mathbb{R}$ dezelfde kardinaliteit bezitten als $\mathbb{R}$ zelf.

N.B. Er wordt niet gevraagd naar de dimensie van de fractal.

5. Gödelnummering als functie van strings naar getallen is

(a) Surjectief en berekenbaar.

(b) Surjectief en tweewegs-berekenbaar.[1]

(c) Injectief en berekenbaar.

√ Injectief, en tweewegs-berekenbaar.

Toelichting. Niet surjectief, want er zijn getallen met priemexponenten groter dan het aantal elementen in het alfabet. De functie is berekenbaar, het is immers eenvoudig in te denken dat er een programma te schrijven valt voor het omzetten van strings naar getallenrijtjes naar Gödelnummers. De functie is omgekeerd berekenbaar, het is immers eenvoudig in te denken dat er een programma te schrijven valt dat een getal in priemgetallen, ontbindt, daar de exponenten uithaalt en vervolgens die exponenten verbindt met karaktercoderingen.

6. Iemand wil de onbeslisbaarheid van een vraagstuk X aantonen. Welke aanpak zou kunnen slagen?

(a) Laat zien dat instanties van probleem X, kunnen worden uitgedrukt als instanties van een bekend onbeslisbaar probleem.

(b) Laat zien dat instanties van probleem X, automatisch kunnen worden vertaald naar instanties van een bekend onbeslisbaar probleem.

[1] Berekenaar in twee richtingen: zowel de functie als haar inverse functie zijn berekenbaar op alle plekken waar ze zijn gedefinieerd.

√ Laat zien dat instanties van een bekend onbeslisbaar probleem, automatisch kunnen worden vertaald naar instanties van probleem X.

(d) Een ander antwoord.

7. Definieer $H \subseteq \mathbb{N}$ als volgt. Enumereer invoerloze programma's P_1, P_2, P_3, ... en laat $i \in H$ als en slechts als programma P_i stopt.

i) H is opsombaar.

ii) H is beslisbaar.

(a) *i)* en *ii)*.

√ Alleen uitspraak *i)*.

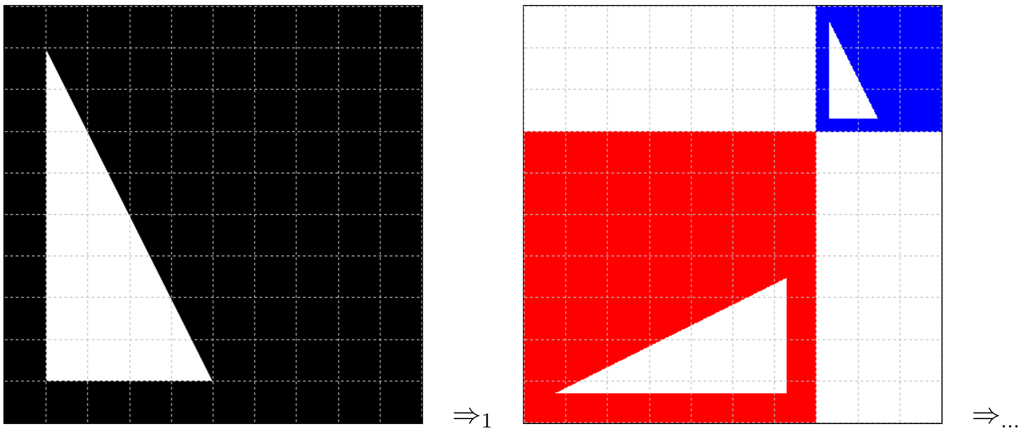
(c) Alleen uitspraak *ii)*.

(d) Geen van beide uitspraken is waar.

Toelichting. H is opsombaar. Hier is een algoritme. Draai alle programma's door eerst P_1 een stapje te laten uitvoeren, dan P_1 en P_2 een stapje te laten uitvoeren, dan P_1, P_2 en P_3 een stapje te laten uitvoeren, etc. Op die manier krijgt elk programma alle tijd. Druk het nummer van een programma af als het stopt. Ga na dat op deze manier precies H wordt afgedrukt.

H is onbeslisbaar, anders zou de beslisbaarheid van H kunnen worden gebruikt om het invoerloze stop-probleem op te lossen. Maar van dat laatste probleem weten we dat het onbeslisbaar is.

8. De figuur hieronder geeft de ontwikkeling weer van een IFS. De lengte van de ribbe van het grootste beeld is 0.7. Beschrijf wat de grootste contractie doet, en geef de dimensie van de resulterende fractal.



(a) $\times 0.7$, dan $\nearrow (0.7, 0.7)$, dan $\curvearrowright 90^0$. $D = 1.72$

(b) $\times 0.7$, dan $\nearrow (0.7, 0.7)$, dan $\curvearrowright 90^0$. $D = 1.76$

(c) $\times 0.7$, dan $\curvearrowleft 90^0$, dan $\nearrow (0.7, 0.0)$. $D = 1.72$

√ $\times 0.7$, dan $\curvearrowleft 90^0$, dan $\nearrow (0.7, 0.0)$. $D = 1.76$

Toelichting. In woorden:

	schaal	draai	verschuif
Rood:	0.7	90	(0.7, 0.0)
Blauw:	0.3	0	(0.7, 7.0)

In die volgorde. Dus eerst schalen, dan draaien, en dan verschuiven. Een andere volgorde kan ook, maar dan zijn de translatievectoren anders.

$$D = \frac{\log(7 \times 7 + 3 \times 3)}{\log 10} = \log(49 + 9) \approx 1.76$$

9. Er zijn verschillende manieren om het uiteindelijke beeld van een IFS te genereren. Welke manier benadert steeds beter de ideale fractal?

   $\surd$ Doe op het hele domein één iteratie van alle contracties, verenig de beelden, en herhaal.
   (b) Itereer één contractie, en herhaal dit voor de andere contracties.
   (c) Doe op één willekeurige pixel een vast aantal iteraties, zeg 100, van steeds één willekeurige contractie. Plot het resultaat van de laatste iteratie.
   (d) Itereer op elke pixel elke contractie een willekeurig aantal keren. Plot voor elke contractie de laatste benadering.

Toelichting. 9b niet, want iteratie is een oneindig proces. Als de eerste contractie geïtereerd wordt, komt de tweede nooit aan de beurt. 9c niet, want de ideale fractal kan nooit worden bereikt met een eindig aantal keren itereren. 9d niet, want een willekeurig aantal keren is nog steeds een eindig aantal keren. Bovendien moeten bij een dergelijke methode de contracties door elkaar heen worden geïtereerd (wat wel bij 9c gebeurt).

10. Wat is een quad tree?

   (a) Een fractal met op elke splitsing vier vertakkingen.
   (b) Een fractal die begint met een vierkant, daarop schuin twee vierkanten, etc.
   (c) Een IFS met vier contracties.
   $\surd$ Een adaptieve representatie van ruimtelijke informatie.

Toelichting.

11. Welke string is de codering van een 1D CA met $\lambda = 0.8$? (Elke string is 20 karakters lang.)

   (a) 14243013243133401323
   (b) 00004313231424340000
   (c) 00120400001003001042
   $\surd$ Een ander antwoord.

Toelichting. Voor $\lambda = 0.8$ moet precies 80% van de decimalen ongelijk nul zijn, dus vier decimalen moeten nul zijn.

12. Geef de λ van een 1D CA met $K = 3$, $R = 1$, waarbij de volgende toestand van een cel de som van de omgeving is, modulo drie.

   (a) $2/7$
   (b) $3/7$
   $\surd$ $4/7$
   (d) Een ander antwoord.

Toelichting. Er zijn $(2R + 1)(K - 1) + 1 = 3 \times 2 + 1 = 7$ mogelijk sommen (bovenste rij):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Modulo drie geeft de onderste rij, dus $\lambda = 4/7$.

13. Hoeveel cellen bevat een Moore-omgeving met straal 5?

    (a) 21

    (b) 24

    (c) 25

    √ 121

Toelichting. Als $R = 5$ dan is één zijde van de Moore omgeving $2R + 1 = 11$ cellen lang. Dus $11 \times 11 = 121$ cellen, want de centrumcel telt ook mee.

14. De radius van een 1-dimensionale cellulaire automaat met codering

$$\underbrace{20202100110011 \ldots 00120011100012}_{243}$$

is gelijk aan

    √ 2

    (b) 3

    (c) 5

    (d) 4

Toelichting. Er zijn klaarblijkelijk drie toestanden: $S = \{0, 1, 2\}$. De lengte van de coderingsstring, in dit geval 243, is gelijk aan het aantal regels. Nu geldt:

$$\begin{aligned} \text{aantal regels} = K^{2R+1} \Leftrightarrow & \quad 243 = 3^{2R+1} \\ \Leftrightarrow & \quad 2R + 1 = \log_3 243 \\ \Leftrightarrow & \quad 2R + 1 = 5 \\ \Leftrightarrow & \quad R = 2 \end{aligned}$$

15. Welke van de volgende berekeningsmechanismen is **niet** Turing-compleet?

    √ Multiple reduction copy machine (MRCM).

    (b) Conway's game of life (2-dimensionale CA).

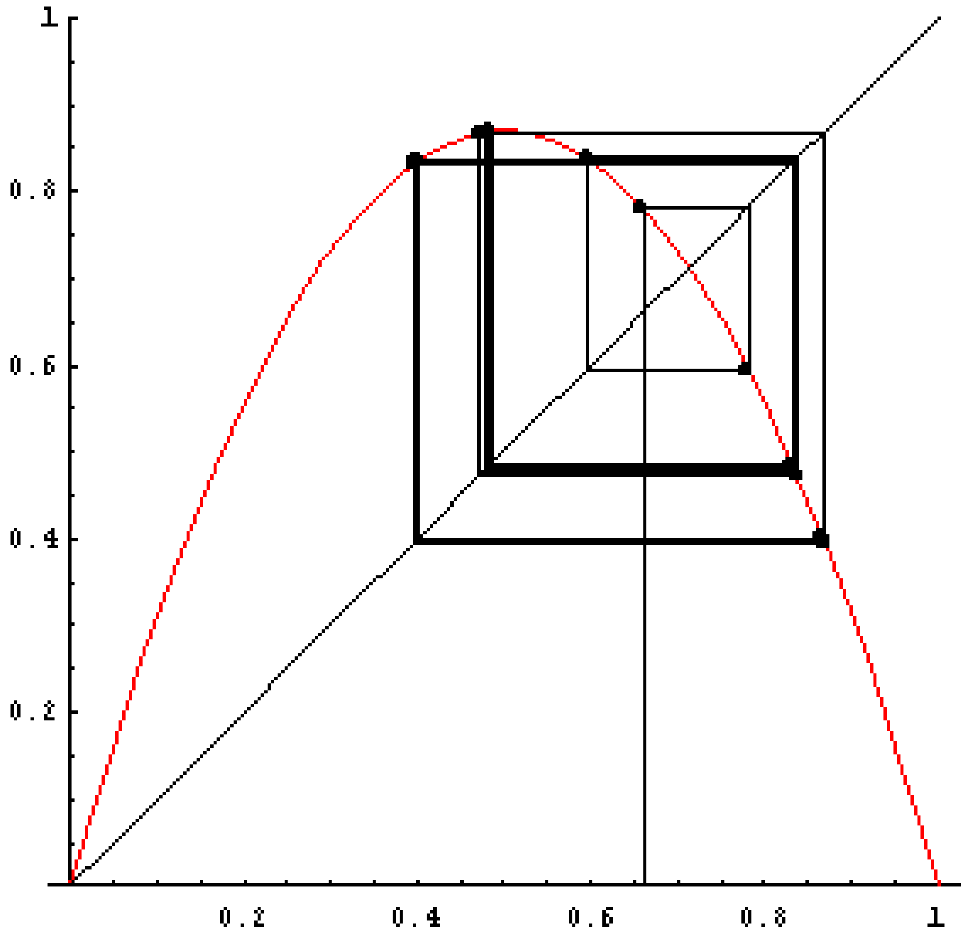
    (c) Rule 110 (1-dimensionale CA).

    (d) Wire world.

Toelichting. Van de twee CA's zou je op basis van het hoorcollege en/of het boek van Flake meteen moeten weten dat deze TC zijn. Blijven over de MRCM en Langton's ant. De MRCM is een stelsel contracties, en heeft verder weinig te maken met berekening. Deze is dus waarschijnlijk niet TC. Van Langton's ant (cf. boek Flake) is bekend dat deze TC is. Mocht je dat niet weten, dan is de Turing-compleetheid van Langton's ant toch wel waarschijnlijker dan de Turing-compleetheid van MRCMs, omdat met weinig voorstellingsvermogen is in te zien dat de celconfiguraties van Langton's ant zouden kunnen dienen als input voor een computer de deze celconfiguraties leest en op basis daarvan iets doet.

Wire world is TC omdat deze nu juist gemaakt is om elektronische circuits te emuleren.

16. Van welke afbeelding zien we hier een spinnenwebdiagram? En met welke periode?



√ De logistieke afbeelding met periode 4.

(b) De logistieke afbeelding met periode 8.

(c) De bifurcatievergelijking met periode 4.

(d) De bifurcatievergelijking met periode 8.

Toelichting. Na een aanloopfase zien we dat de baan circuleert over vier punten.

17. Gegeven is

$$\kappa : [0,1] \to [0,1] : x \mapsto \mu x(1-x)$$

waarbij $\mu \in [0,4]$. Welke van de volgende uitspraken zijn waar? Voor sommige μ convergeert $\kappa \ldots$

i) … naar één waarde.

ii) … naar een cyclus.

iii) … niet.

(a) *i)* en *ii)*.

(b) *i)* en *iii)*.

(c) *ii)* en *iii)*.

√ Een ander antwoord.

Toelichting. κ is de logistieke afbeelding. Van deze is bekend dat deze voor kleine μ stabiliseert of periodiek gedrag vertoont, en voor bijvoorbeeld $\mu = 4$ chaotisch is, dus niet convergeert. Dus *i)*, *ii)* en **??**.

18. Welke van de volgende twee uitspraken zijn van toepassing voor een chaotische afbeelding?

i) Deterministisch.

ii) Omkeerbaar in de tijd.

(a) *i)* en *ii)*.

$\surd$ Alleen uitspraak *i)*.

(c) Alleen uitspraak *ii)*.

(d) Geen van beide uitspraken.

Toelichting. Uitspraak *i)* is per definitie waar.

Uitspraak *ii)* is onwaar. De logistieke afbeelding, bijvoorbeeld, is een parabool met een top in $[0, 1]$, en deze functie is niet injectief, en dus niet inverteerbaar, en daarmee niet tijd-reversibel.

19. Beschouw het volgende (gedachten-) experiment. Bij aanvang worden 100 balletjes verdeeld over 7 vazen. Vervolgens springt er steeds één balletje over van een vaas naar een (niet noodzakelijk andere) niet-lege vaas. Dit is een Markov-proces. Hoeveel doorgangsklassen bezit dit proces?

(a) 7

$\surd$ 120

(c) 127

(d) 128

Toelichting. Dit proces bezit $2^7 - 1 = 127$ klassen. (Van elke twee toestanden in één klasse zijn dezelfde vazen gevuld.) Dit proces bezit 7 recurrente klassen met elk één toestand, namelijk die toestand waarin alle 100 ballen in één vaas zitten. Blijven $127 - 7$ klassen over die niet recurrent, en dus doorgangsklasse, zijn.

20. Wat is er emergent aan het houtsnippers-en-termietenmodel?

(a) Het individuele gedrag van de termieten.

(b) Het ontstaan van houtstapels.

(c) Het ontstaan van één grote houtstapel.

$\surd$ De locaties van de houtstapels.

Toelichting. Emergent is dat wat niet evident herleidbaar is naar individueel gedrag.

(a) Individuele gedrag van de termieten is 1-op-1 herleidbaar naar individuele gedrag van de termieten, dus deze mogelijkheid valt af.

(b) Het ontstaan van houtstapels kan worden verklaard doordat termieten alleen hout laten vallen in de buurt van ander hout, gecombineerd met het feit dat de kans dat een termiet tegen grote stapels oploopt ook navenant groter is.

(c) Het ontstaan van één grote houtstapel kan met dezelfde redenering worden verklaard, plus het gegeven dat eenmaal verdwenen stapels nooit meer terug komen.

(d) De locatie van houtstapels kan nooit worden afgeleid uit het individuele gedrag van termieten, anders dan het systeem real time te laten lopen.

21. Aan welke van de volgende vier clausules voldoet een CA niet altijd?

$\surd$ Deterministisch.

(b) Homogeen.

(c) Discreet.

(d) Lokaal gedefinieerd.

Toelichting. Cf. definitie op slides. Er bestaan non-deterministische CA's, bv. probabilistische CA's (ook wel: stochastische CA's). Bijvoorbeeld CA's voor het modelleren van een bosbrand. Een groene cel (begroeiing) kan dan met een met een zekere kans rood worden (ontvlammen).

22. Welke van de volgende uitspraken zijn waar?

    i) Toernooiselectie is makkelijker te implementeren dan fitness-proportionele selectie.

    ii) Toernooiselectie lijdt minder aan verlies van selectiedruk dan fitness-proportionele selectie.

    √ *i)* en *ii)*.
    (b) Alleen uitspraak *i)*.
    (c) Alleen uitspraak *ii)*.
    (d) Geen van beide uitspraken is waar.

23. Er wordt fitness-proportioneel geselecteerd uit een populatie van 100 genomen waarbij de fitness als volgt is verdeeld:

type	1	2	3	4	5	6
multipliciteit	4	21	31	7	16	21
fitness	0.1	1.9	2.1	0.2	0.9	1.1

(Dus van type 1 zijn er vier exemplaren, allen met fitness 0.1.) Bereken de kans dat, bij één trekking, een genoom van type 1 geplaatst wordt de mating pool.

(a) 0.001
√ 0.003
(c) 0.011
(d) 0.031

Toelichting.
$$\frac{4 \times 0.1}{4 \times 0.1 + 21 \times 0.9 + 31 \times 2.1 + 7 \times 0.2 + 16 \times 0.9 + 21 \times 1.1} \approx 0.003$$

24. Gegeven is een populatie met 100 genotypen, met oplopende (fitness-) rang $1, \dots, 100$. Bereken de kans dat (na 100 trekkingen op basis van rang-gebaseerde selectie) genotype met rang 1 in de mating pool terecht komt.

De volgende informatie mag worden gebruikt:
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(a) 0.0002
(b) 0.002
√ 0.02
(d) Een ander antwoord.

Toelichting. Kans bij één trekking:
$$p_1 = \frac{r_1}{\sum_i r_i} = \frac{1}{1 + 2 + \cdots + 100} = \frac{2}{100 \times 101} = \frac{1}{5050}.$$

De kans dat bij één trekking genotype met rang 1 niet in de mating pool terecht komt is dus
$$1 - \frac{1}{5050}$$

De kans dat na 100 trekkingen genotype met rang 1 niet in de mating pool terecht komt is dus

$$(1 - \frac{1}{5050})^{100}$$

De kans dat na 100 trekkingen genotype met rang 1 wel in de mating pool terecht komt is dus

$$1 - (1 - \frac{1}{5050})^{100} = 0.01961 \cdots \approx 0.02.$$

Einde. Antwoorden in de loop van de dag.