Naam: .... Collegekaart-nummer: ....

- Legitimatie verplicht.
- Je mag tijdens de eerste 30 minuten de tentamenzaal niet verlaten.
- Op de tafel: legitimatie, tentamenvel, schrijfgerei, A4tje met aantekeningen, eten, drinken.
- Niet op de tafel: al het overige. (Eigen kladpapier, etui, dictaat, slides, elektronische apparatuur incl. telefoon.)
- Het gebruik van markeerstiften is niet toegestaan.
- Als je naar het toilet wilt, steek je je vinger op om een surveillant te waarschuwen. Hij of zij zal je toestemming geven om te gaan en met je meelopen naar het toilet. Toiletbezoek is niet toegestaan tijdens het eerste en het laatste halfuur van het tentamen. Redelijkerwijs gaat de surveillant er vanuit dat je hooguit éénmaal tijdens het tentamen het toilet bezoekt.
- Het is verboden een telefoon of vergelijkbare elektronische apparaten mee naar het toilet te nemen.
- Verplicht inleveren: alle antwoordbladen, ook als ze leeg zijn.
- Niet inleveren: de opgavenbladen.
- Nadat je de tentamenzaal hebt verlaten, is het niet toegestaan je op te houden in de gangen/hal direct buiten de tentamenzaal in verband met geluidsoverlast en toiletbezoek. Je volgt de instructies van de surveillant op.

Meerkeuze antwoorden

- Bij elke vraag is steeds precies één antwoord het juiste. In enkele gevallen kunnen andere antwoorden “bijna juist” of “deels juist” zijn. In dergelijke gevallen geldt het beste antwoord.
- Antwoord in de daarvoor bestemde vakjes door een kruisje te plaatsen. Heb je je vergist, kras dan het kruisje door, en zet een kruisje in een ander vakje.
- Het is mogelijk om aan de surveillant een nieuw antwoordvel te vragen. Onze voorraad vellen is eindig, first come first serve.
- Omdat er verschillende versies van de opgaven bestaan, correspondeert de volgorde van de meerkeuzevragen opgaven niet altijd met de volgorde van de stof zoals die behandeld is in de colleges.

Succes!

	A	*B*	*C*	*D*
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				

	A	*B*	*C*	*D*
9.				
10.				
11.				
12.				
13.				
14.				
15.				
16.				

	A	*B*	*C*	*D*
17.				
18.				
19.				
20.				
21.				
22.				
23.				
24.				

Kladpapier.

Meerkeuzevragen

1. Welke van de twee volgende beweringen zijn waar?

   i) $[0, 2) \sim \mathbb{R}$.
   ii) $[0, 2) \sim [0, 2]$.

   (a) Geen.
   (b) Alleen *i)*.
   (c) Alleen *ii)*.
   √ Beiden.

   Toelichting. Dat alle reële intervallen gelijkmachtig zijn met $\mathbb{R}$ zou parate kennis moeten zijn. Als het geen parate kennis is, kan de stelling van Schröder-Bernstein worden gebruikt om gelijkmachtigheid te verifiëren.

2. Laat $X \subseteq [0, 1]$ bestaan uit decimale representaties van alle realisaties van het volgende experiment: net zo lang gooien met een dobbelsteen totdat een zes verschijnt. Dus $0.154336 \in X$, maar ook $0.5152434222141543\ldots \in X$. Welke eigenschappen bezit deze verzameling?

   i) Aftelbaar.
   ii) Kansmaat nul.

   (a) Geen.
   (b) Alleen *i)*.
   √ Alleen *ii)*.
   (d) Beiden.

   Toelichting. Niet aftelbaar, want X bevat alle getallen met een oneindige decimale expansie met cijfers uit $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Daarop kan bijvoorbeeld diagonalisatie worden toegepast.

   Kansmaat nul. Als een willekeurig getal binnen $[0, 1]$ wordt geprikt, is de kans dat een getal wordt geprikt met decimalen buiten $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, i.e. de kans dat een getal wordt geprikt buiten X, gelijk aan 1.

3. Laat A een aftelbaar alfabet zijn. De verzameling van alle mogelijke boeken, geschreven in A is, ongeacht de lengte van dergelijke boeken,

   (a) eindig.
   (b) eindig als A eindig is, anders aftelbaar oneindig.
   √ altijd aftelbaar oneindig.
   (d) overaftelbaar.

   Toelichting. Laat A eindig. Zet eerst alle boeken ter lengte 1 op een rij, dat zijn er $|A|$. Zet dan alle boeken ter lengte 2 op een rij, dat zijn er $|AxA| = |A|^2$. Zet dan alle boeken ter lengte 3 op een rij, dat zijn er $|AxAxA| = |A|^3$. Op deze manier ontstaat een aftelling van alle boeken.

   Laat A aftelbaar oneindig, en laat A_i, $i \geq 1$ bestaan uit de eerste i elementen uit een vaste aftelling van A. Laat B_i bestaan uit alle boeken met letters uit A_i. Dan is elke B_i volgens bovenstaaand argument aftelbaar. Elke aftelbare vereniging van aftelbare verzameling is ook weer aftelbaar. (Uitgelegd op college met zig-zag argument en geoefend op werkcollege.) Dus $B = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$ is aftelbaar.

4. Het Gödel-nummer van "Abba" in ASCII is:

   √ $2^{65}3^{98}5^{98}7^{97}$.
   (b) $2^{65} + 3^{98} + 5^{98} + 7^{97}$.
   (c) $65^2 98^3 98^5 97^7$.
   (d) $65^2 + 98^3 + 98^5 + 97^7$.

> **Toelichting.** Zie slides en TCBoN, pp. 25-26, 41-45, 453. De ASCII-codes van de letters "A" en "a" hoefde je overigens niet te weten, die konden uit de antwoorden worden gehaald. Ook kon je afleiden dat de quotes niet bij de string horen.

5. Wat is een registermachine?

(a) Een machine met een eindig aantal registers die Turing-compleet is.
(b) Een machine met een eindig aantal registers en vier elementaire instructies.
$\surd$ Een eenvoudig rekenmodel dat Turing-compleet is.
(d) Een eenvoudig rekenmodel dat niet Turing-compleet is.

6. Welke van de twee volgende beweringen zijn waar?

i) Het tegelprobleem is beslisbaar.
ii) Het tegelprobleem is semi-beslisbaar.

(a) Geen.
(b) Alleen *i)*.
$\surd$ Alleen *ii)*.
(d) Beiden.

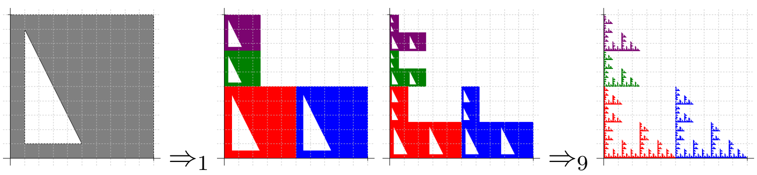
> **Toelichting.** Voor een definitie van (semi-) beslisbaarheid, zie bijvoorbeeld de slides.
>
> Dat het tegelprobleem niet beslisbaar is, is uitgebreid op het college aan de orde geweest, zie ook de slides.
>
> Dat het tegelprobleem semi-beslisbaar is, kan makkelijk worden ingezien door het foute algoritme van Wang voor beslisbaarheid te gebruiken: probeer dus, voor die ene tegelset, voor steeds grotere oppervlaktes alle mogelijke betegelingen uit. Mocht de ingevoerde tegelset een periodieke betegeling bezitten, dan zal die voor een zekere oppervlakte op een gegeven moment tevoorschijn komen. (Periodiciteit is namelijk eindig.) Einde algoritme.
>
> Makkelijk kan ook worden ingezien dat periodiciteit algoritmisch kan worden herkend. Mocht de ingevoerde tegelset *geen* periodieke betegeling bezitten, dan zal het algoritme in veel gevallen vruchteloos blijven proberen. Dat is niet erg, want we moesten <u>semi</u>-beslisbaarheid aantonen.

7. Stel X en Y zijn opsombaar. Welke verzameling is niet noodzakelijk opsombaar?

(a) $X \cap Y$.
(b) $X \cup Y$.
$\surd$ $X - Y$.
(d) $X \times Y$.

> **Toelichting.** Anders heeft het begrip "complementair opsombaar" ook geen nut. Zo werd het ook op college uitgelegd.
>
> Er zijn inderdaad verzamelingen te bedenken die opsombaar zijn maar niet complementair opsombaar, bijvoorbeeld de verzameling van alle Gödelnummers van invoerloze programma's die stoppen. Deze verzameling is onbeslisbaar, maar nog wel semi-beslisbaar (of opsombaar, wat hetzelfde is als semi-beslisbaar).

8. De dimensie van de hieronder afgebeelde fractal



is gelijk aan

(a) 1.313.
(b) 1.424.
(c) 1.578.
√ 1.661.

Toelichting. We zien twee kopieën met een reductiefactor van twee en twee kopieën met een reductiefactor van vier.

De twee exemplaren met een reductiefactor van twee kunnen worden gesplitst in acht kopieën met een reductiefactor van vier. In totaal geeft dit tien kopieën met een reductiefactor van vier. Dus de dimensie van de fractal is $\log(10)/\log(4) \approx 1.661$.

9. Welke van de onderstaande beweringen hebben hebben betrekking op de notie quad-tree?

i) Een adaptieve fractal.
ii) Een techniek om adaptief ruimtelijke informatie te representeren.
iii) Een container representeert alle informatie die het overdekt.
iv) Als een container te veel informatie bevat, dan splitst deze in sub-containers.

(a) Alleen *i)* en *ii)*.
(b) Alleen *ii)* en *iii)*.
(c) Alleen *iii)* en *iv)*.
√ Iets anders.

10. Een CA met 10×10 cellen en twee toestanden per cel (aan/uit) loopt 10^{30} tikken. Al die tijd zijn altijd minstens vijf (niet noodzakelijk dezelfde) cellen aan.

√ Het is niet uit te sluiten dat op enig moment vier cellen of minder aan staan.
(b) Voor de rest van de tijd zijn altijd minstens vijf (niet noodzakelijk dezelfde) cellen aan.
(c) Voor nog een keer 10^{30} tikken zijn altijd minstens vijf (niet noodzakelijk dezelfde) cellen aan. Voor daarna kan niets worden geconcludeerd.
(d) Er kan niets worden geconcludeerd.

Toelichting. Als geheel kent de automaat $2^{10\times 10} > 10^{30}$ configuraties. (Want $log_{10}(2^{100}) \approx 30.103 > 30$.)

Na 10^{30} stappen zijn er dus nog stappen over waarin de automaat nog van alles kan doen. Dat er niets kan worden geconcludeerd kan niet met stelligheid worden gezegd. Met andere woorden: dat er niet iets kan worden geconcludeerd kan niet worden uitgesloten. Met de kennis die wij in het bestek van IAS hebben opgedaan kan namelijk niet met zekerheid worden beweerd dat er géén stelling zou kunnen bestaan die wél een concrete uitspraak doet over het verdere verloop van de automaat.

11. Aan welke van de volgende vier clausules voldoet een CA niet altijd?

√ Deterministisch.
(b) Homogeen.
(c) Discreet.
(d) Lokaal gedefinieerd.

Toelichting. Cf. definitie op slides. Er bestaan non-deterministische CA's, bv. probabilistische CA's (ook wel: stochastische CA's). Bijvoorbeeld CA's voor het modelleren van een bosbrand. Een groene cel (begroeiing) kan dan met een met een zekere kans rood worden (ontvlammen).

12. Hoeveel cellen bezit een Von Neumann omgeving in 4D?

√ 9
(b) 27
(c) 81
(d) Iets anders.

Toelichting. In 1D: 3; in 2D: 5; in 3D: 7; in 4D: 9. Met elke dimensie komen er twee cellen bij: links/rechts; boven/onder; voor/achter; . . . / . . . . Door alleen al de rij 3, 5, 7 uit te breiden kon het antwoord al gegokt worden.

13. Welke van de twee problemen zijn semi-beslisbaar t.a.v. Conway's game of life op een oneindig grid?

Of een begin-configuratie . . .

i) . . . periodiek is.
ii) . . . een ongehinderde glider produceert.

(a) Geen.
√ Alleen *i)*.
(c) Alleen *ii)*.
(d) Beiden.

Toelichting. Als een configuratie periodiek is komt deze na een eindig aantal tikken terug. Het is makkelijk je te realiseren dat er een programma is te bedenken dat periodieke configuraties kan herkennen: gewoon bijhouden welke configuraties worden doorlopen en een signaal afgeven bij herhaling.

GoL is Turing-compleet. In principe kan dus elk computerprogramma in een taal J worden gesimuleerd in GoL. Sterker, er bestaat een algoritme A dat elk invoerloos programma in $j \in J$ implementeert als GoL-programma π in een begrensd gebied G van GoL.

Breid A uit naar A' door buiten G een glider af te schieten als en slechts als π stopt. Dan kan het invoerloze stop-probleem worden opgelost door te kijken of het programma π' een glider afschiet.

14. A ligt dicht in X. Welke van de hier volgende vier omschrijvingen is NIET correct?[1]

(a) Alle elementen uit X zijn verdichtingspunten van A.
√ Voor alle $x \in X$ en voor alle $\epsilon \geq 0$ is er een $a \in A$ zo dat $d(x, a) < \epsilon$.
(c) Voor alle $x \in X$ en voor alle $\epsilon > 0$ is er een $a \in A$ zo dat $d(x, a) \leq \epsilon$.
(d) Voor alle $\epsilon > 0$ en voor alle $x \in X$ is er een $a \in A$ zo dat $d(x, a) \leq \epsilon$.

Toelichting. Elke omgeving van x moet elementen van A bevatten. Het geval $\epsilon = 0$ levert geen omgeving van x op, alleen x zelf.

15. Welke eigenschap is NIET van toepassing op chaotisch gedrag?

(a) Deterministisch.
(b) Gevoelig voor perturbaties.
√ De rij van elk geïtereerd punt ligt dicht in de toestandruimte.
(d) De verzameling periodieke punten ligt dicht in de toestandruimte.

Toelichting. Mixing: er is een punt dat, geïtereerd, dicht ligt in de toestandruimte. Hoeft dus niet voor alle punten te gelden. (En geldt ook niet voor alle punten, vanwege (15d).)

16. Over welke begrippen van de hier onderstaande begrippen bestaat wetenschappelijke consensus over de definitie?

i) Chaos.
ii) Emergentie.

[1] Herinner: $d(x, y)$ betekent "de afstand tussen x en y".

$\surd$ Geen.

$\surd$ Alleen *i)*.

$\surd$ Alleen *ii)*.

$\surd$ Beiden.

Toelichting. Afgekeurd: tijdens het college (en op slides) werd een definitie van emergentie gegeven. Ik voegde hier aan toe dat wetenschappers het over de interpretatie van deze definitie vaak oneens zijn. Dit laat open of er nu wel of geen consensus bestaat over de definitie zelf.

17. Hoeveel inversies bevat de rij $5, 1, 4, 3, 2$?

(a) Drie.

(b) Vier.

(c) Vijf.

$\surd$ Iets anders.

Toelichting. Inversies zijn verkeerd geplaatste getallenparen. Uit n getallen kunnen $\binom{n}{2}$ ongeordende paren worden gekozen.

Inversies: $\{1, 5\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$. Dit zijn er zeven.

18. In een simulatie op een reële computer is het mogelijk om, naast stabiliteit en periodiciteit, in de volgende meta-toestanden te geraken.

$\surd$ Geen.

$\surd$ Quasi-periodiciteit.

$\surd$ Chaos.

$\surd$ Quasi-periodiciteit en chaos.

Toelichting. Een reële computer beschikt over een eindig geheugen en eindig veel schrijfruimte en kan dus altijd maar een eindig aantal toestanden doorlopen. Daaruit volgt antwoord (a). In het bijzonder zijn quasi-periodiciteit en chaos op een echte computer nooit mogelijk: bij quasi-periodiciteit en chaos keert een beweging *nooit* (quasi-periodiciteit) of *bijna nooit* (chaos) terug naar het beginpunt. N.B. “bijna nooit” $\neq$ “altijd” dus chaos valt als mogelijkheid echt af op een echte computer.

Deze vraag is afgekeurd omdat voor veel mensen niet duidelijk was dat met het voorvoegsel “reëel” een fysieke (echte) computer werd bedoeld.

19. Welke sturingsmechanismen komen NIET voor in Reynolds’ originele programma voor flocking, genaamd “Boids”?

i) View.

ii) Alignment.

iii) Coherence.

iv) Acceleration.

v) Separation.

$\surd$ Alleen *i)* en *iv)*.

(b) Alleen *ii)* en *iii)*.

(c) Alleen *ii)* en *v)*.

(d) Iets anders.

20. Welke van de twee volgende beweringen zijn waar?

i) Emergentie impliceert zelf-organisatie.

ii) Zelf-organisatie impliceert emergentie.

√ Geen.
(b) Alleen *i)*.
(c) Alleen *ii)*.
(d) Beiden.

Toelichting. Tegenvoorbeeld *i)*: het plotseling wegvallen van een structuur zonder duidelijke verklaring, bijvoorbeeld in een economische of sociale omgeving. Een concreet voorbeeld is het ontstaan van anarchie zonder een duidelijk aanwijsbare trigger. Tegenvoorbeeld *ii)*: inzichtelijke vormen van zelf-organisatie, bijvoorbeeld decentrale organisatievormen zoals het internet en peer-to-peer netwerken.

21. Hoeveel van de volgende noties zijn van toepassing op een Markov proces?

– Probabilistisch.
– Toestandovergangen.
– Doorgangsklasse.
– Recurrente klasse.
– Absorberende toestand.

(a) Twee.
(b) Drie.
(c) Vier.
√ Vijf.

Toelichting. Vijf.

22. Hoeveel pure Nash-evenwichten bezit het volgende matrix-spel?

$$\begin{array}{c} \\ T \\ M \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L & M & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1,8 & 8,7 & 9,2 \\ 4,3 & 1,2 & 7,10 \\ 3,6 & 4,8 & 0,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

√ 0.
(b) 1.
(c) 2.
(d) 3.

Toelichting. Wel drie gemixte evenwichten, maar die zijn moeilijk te berekenen en werden niet gevraagd.

23. Hoeveel Pareto-optima bezit het volgende matrix-spel?

$$\begin{array}{c} \\ T \\ M \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L & M & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1,8 & 8,7 & 9,2 \\ 4,3 & 1,2 & 7,10 \\ 3,6 & 4,8 & 0,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

√ 3.
(b) 4.
(c) 5.
(d) 6.

Toelichting. $(1,8) < (7,10)$, $(4,3) < (8,7)$, $(1,2) < (8,7)$, $(3,6) < (8,7)$, $(4,8) < (7,10)$, $(0,2) < (8,7)$. Blijven over $(8,7)$, $(9,2)$ en $(7,10)$,

24. Geef het (enige) Nash-evenwicht van het volgende matrix-spel.

$$\begin{array}{c} \\ T \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,9 & 10,8 \\ 9,0 & 8,4 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) $(4/5, 1/5)$ vs. $(2/7, 5/7)$.

(b) $(3/10, 7/10)$ vs. $(2/7, 5/7)$.

√ $(4/5, 1/5)$ vs. $(2/11, 9/11)$.

(d) $(2/5, 3/5)$ vs. $(2/11, 9/11)$.

Toelichting. Aangezien er geen pure evenwichten zijn, moet gezocht worden naar een gemixt evenwicht.

Laat $p \in [0, 1]$ de gemixte strategie van de rijspeler zijn, en $q \in [0, 1]$ die van de kolomspeler. Rij's uitbetalingsfunctie, afhankelijk van p en q, is

$$\begin{aligned} U(p, q) &= pq \cdot 0 + p(1-q) \cdot 10 + (1-p)q \cdot 9 \\ &\qquad + (1-p)(1-q) \cdot 8 \\ &= 8 + p(2 - 11q) + q. \end{aligned}$$

Er moet uitgezocht worden voor welke q de rijspeler indifferent is.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial p} U(p, q) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\partial}{\partial p} \left(8 + p(2 - 11q) + q\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2 - 11q = 0. \end{aligned}$$

Dus voor $q = 2/11$ is rijspeler indifferent. Op dezelfde manier is de kolomspeler indifferent voor $p = 4/5$. Er is dus een evenwicht bij $p = 4/5$ en $q = 2/11$.

Einde. Antwoorden in de loop van de dag.