

Naam: Collegekaart-nummer:

- Legitimatie verplicht.
- Je mag tijdens de eerste 30 minuten de tentamenzaal niet verlaten.
- Op de tafel: legitimatie, tentamenvel, schrijfgerei, A4tje met aantekeningen, eten, drinken.
- Niet op de tafel: al het overige. (Eigen kladpapier, etui, dictaat, slides, elektronische apparatuur incl. smartphones, rekenmachine, mobiel.)
- Het gebruik van markeerstiften is niet toegestaan.
- Als je naar het toilet wilt, steek je je vinger op om een surveillant te waarschuwen. Hij of zij zal je toestemming geven om te gaan en met je meelopen naar het toilet. Toiletbezoek is niet toegestaan tijdens het eerste en het laatste halfuur van het tentamen. Redelijkerwijs gaat de surveillant er vanuit dat je hooguit éénmaal tijdens het tentamen het toilet bezoekt.
- Het is verboden een telefoon of vergelijkbare elektronische apparaten mee naar het toilet te nemen.
- Verplicht inleveren: alle antwoordbladen, ook als ze leeg zijn.
- Niet inleveren: de opgavenbladen.
- Nadat je de tentamenzaal hebt verlaten, is het niet toegestaan je op te houden in de gangen/hal direct buiten de tentamenzaal in verband met geluidsoverlast en toiletbezoek. Je volgt de instructies van de surveillant op.

Meerkeuze antwoorden

- Bij elke vraag is steeds precies één antwoord het juiste. In enkele gevallen kunnen andere antwoorden “bijna juist” of “deels juist” zijn. In dergelijke gevallen geldt het beste antwoord.
- Antwoord in de daarvoor bestemde vakjes door een kruisje te plaatsen. Heb je je vergist, kras dan het kruisje door, en zet een kruisje in een ander vakje.
- Het is mogelijk om aan de surveillant een nieuw antwoordvel te vragen. Onze voorraad vellen is eindig, first come first serve.
- Omdat er verschillende versies van de opgaven bestaan, correspondeert de volgorde van de meerkeuzevragen opgaven niet altijd met de volgorde van de stof zoals die behandeld is in de colleges.

Succes!

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				

	A	B	C	D
9.				
10.				
11.				
12.				
13.				
14.				
15.				
16.				

	A	B	C	D
17.				
18.				
19.				
20.				
21.				
22.				
23.				
24.				

Kladpapier.

Meerkeuzevragen

1. Zwermgedrag verloopt in de volgende gevallen deterministisch.

- i) Als in Netlogo de random-generator wordt gestart met een vaste seed.
- ii) Als individuen (vogels, boids) in een vaste volgorde hun routine uitvoeren.

✓ *i* en *ii*).

- (b) Alleen uitspraak *i*).
- (c) Alleen uitspraak *ii*).
- (d) Geen van beide uitspraken is waar.

Antwoord. Behoudens de volgorde van updates zit er geen enkele vorm van non-determinisme in het zwerm-model. Maar als de volgorde van updates ook wordt vastgezet door een seed of een expliciete volgorde is het laatste restje toeval er ook uit. Probeer *i* eens uit met Netlogo.

2. Welke van de volgende twee uitspraken is waar?

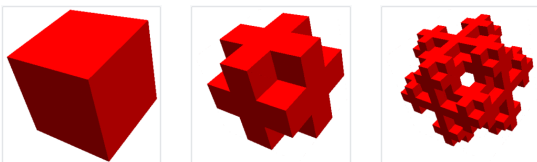
- i) Een lijnstuk heeft dezelfde kardinaliteit als het eenheidsvierkant.
- ii) Het eenheidsvierkant heeft dezelfde kardinaliteit als het platte vlak.

✓ *i* en *ii*).

- (b) Alleen uitspraak *i*).
- (c) Alleen uitspraak *ii*).
- (d) Geen van beide uitspraken is waar.

Antwoord. Hilbert's curve laat zien dat een lijn (oneindig aan beide kanten) dezelfde kardinaliteit bezit als het eenheidsvierkant. Omdat makkelijk is in te zien dat een lijn en een lijnstuk dezelfde kardinaliteit bezitten volgt *i*). Onderdeel *ii*) is om dezelfde reden makkelijk in te zien want een bi-jectie wordt volgens hetzelfde idee geconstrueerd als een bi-jectie tussen bv. een lijnstuk en een lijn.

3. De Moseley sneeuwvlok Type 1 ontstaat door puntsymmetrisch kleinere kubussen weg te nemen volgens onderstaand diagram.



De Hausdorff dimensie van deze fractal is gelijk aan

✓ $\sqrt{\log 18 / \log 3} \approx 2.631$.

- (b) $\log 19 / \log 3 \approx 2.680$.
- (c) $\log 21 / \log 3 \approx 2.771$.
- (d) $\log 22 / \log 3 \approx 2.814$.

Antwoord. Er worden negen van de 27 kubussen weggenomen, dat is te zien aan het laatste plaatje. Er geldt $27 - 9 = 18$.

4. Conways Game of Life ...

- i) ... is Turing-compleet.
- ii) ... is totalitair.

✓ *i* en *ii*).

- (b) Alleen uitspraak *i*).
- (c) Alleen uitspraak *ii*).
- (d) Geen van beide uitspraken is waar.

5. Welke van de volgende twee uitspraken zijn waar?

- i) Er zijn 1D CA's die Turing compleet zijn.
- ii) 1D CA's met $\lambda \in [0.45, 0.55]$ vertonen complex gedrag.

(a) *i* en *ii*).

✓ Alleen uitspraak *i*).

- (c) Alleen uitspraak *ii*).
- (d) Geen van beide uitspraken is waar.

Antwoord. Regel 110 ("Rule 110") is een voorbeeld van een 1D CA die Turing compleet is. Slechts een selectie 1D CA's met $\lambda \in [0.45, 0.55]$ vertoont complex gedrag. Genoeg 1D CA's met $\lambda \in [0.45, 0.55]$ vervallen in periodiek of ruisig gedrag. (Flake, p. 244.)

6. Welke van de volgende twee vraagstukken is beslisbaar?

i) Of er aliens bestaan in het heelal.

ii) Of een gegeven programma minder dan 2GB aan RAM geheugen gebruikt.

(a) *i* en *ii*).

✓ Alleen uitspraak *i*).

- (c) Alleen uitspraak *ii*).
- (d) Geen van beide uitspraken is waar.

Antwoord. Vraagstuk i) is beslisbaar. Als aliens bestaan dan beslist het programma j dat altijd een 1 afdrukt correct over dit vraagstuk. Als aliens niet bestaan dan beslist het programma j' dat altijd een 0 afdrukt correct over dit vraagstuk. Vraagstuk ii) is onbeslisbaar. Als het beslisbaar zou zijn dan zou het

stop-probleem ook beslisbaar zijn op de volgende manier. Het is eenvoudig in te zien dat elke instantie van het stop-probleem automatisch te vertalen is naar een instantie van het geheugengebruik-probleem: als het originele programma stopt laat dan het geheugengebruik van het afgeleide programma ongelimiteerd toenemen. Als het originele programma niet stopt laat dan het geheugengebruik van het afgeleide programma dan onder de 2GB blijven. Dat laatste is altijd te realiseren door paging. (Je eigen laptop zal misschien ook “slechts” 2GB aan RAM geheugen hebben, maar is uiteraard Turing compleet.)

7. Welke notie heeft GEEN betrekking op verzamelingen?

- (a) Opsombaarheid
- ✓ Berekenbaarheid.
- (c) Beslisbaarheid.
- (d) Semi-beslisbaarheid.

Antwoord. We spreken van berekenbare functies.

8. The Computational Beauty of Nature. Zowel op de site van het boek als in het boek zelf vermeldt Flake dat zijn betoog herhaaldelijk teruggrijpt op drie ideeën. (“*Basically, there are three key ideas that keep reappearing throughout the book.*”).

- ✓ – Het geheel is groter dan de som der delen.
 - Het meest interessante spul zit in het midden.
 - Wetenschap is gedoemd tot onzekerheid—maar dat is goed.
- (b) – Complexe entiteiten kunnen altijd herleid worden tot fundamentele entiteiten.
 - De werkelijkheid kan uitsluitend door fysische eigenschappen beschreven worden.
 - Wetenschap is intersubjectief—maar dat is goed.
- (c) – Eigenschappen horen niet wezenlijk tot de systemen zelf: ze zijn verzonnen door mensen.
 - Zelf-organiserende systemen vertonen emergent gedrag.
 - Wetenschap is nooit af—maar dat is goed.
- (d) Het goede antwoord staat er niet bij.

Antwoord. Uit Hoofdstuk 1 van TCBoN:

“*Basically, there are three key ideas that keep reappearing throughout the book (...):*”

- (a) **The whole is greater than the sum of the parts.** *By this I mean that the topics of computation, fractals, chaos, complex systems, and adaptation are far more interesting considered together than by themselves (...).*
- (b) **The interesting stuff is in the middle.** *“Beauty,” i.e., that which makes something interesting, is related to a mixture of regularity and irregularity. (...).*
- (c) **Science is doomed to uncertainty—but this is a good thing.** *The interesting things mentioned above are often found to have computationally profound qualities. (...).*

9. Geef de pure Nash-evenwichten van

	C	D
C	(0, 1)	(1, 1)
D	(0, 1)	(1, 0)

- (a) CC, CD
- ✓ CC, CD, DC
- (c) CD, DC
- (d) Het goede antwoord staat er niet bij.

10. Hoeveel cellen bezit een Von Neumann omgeving in 4D?

- ✓ 9
- (b) 27
- (c) 81
- (d) Het goede antwoord staat er niet bij.

Antwoord. In 1D: 3; in 2D: 5; in 3D: 7; in 4D: 9. Met elke dimensie komen er twee cellen bij: links/rechts; boven/onder; voor/achter; .../.... Door alleen al de rij 3, 5, 7 uit te breiden kon het antwoord al gegokt worden.

11. Welke van de hieronder gegeven termen zijn alternatieve aanduidingen voor de term “iterated function system”?

- i) Iterated non-linear fractal.
 - ii) Multiple reduction copy machine.
 - iii) A system of lineair contractions.
 - iv) Recursive function system.
- (a) i) en ii).
 ✓ ii) en iii).

(c) *iii*) en *iv*).

(d) Het goede antwoord staat er niet bij.

12. Chaotisch gedrag is *ergodisch*. Wat betekent dat?

(a) Voor elke toestand, en elke omgeving van die toestand, hoe klein ook, komt het proces vroeg of laat in die omgeving.

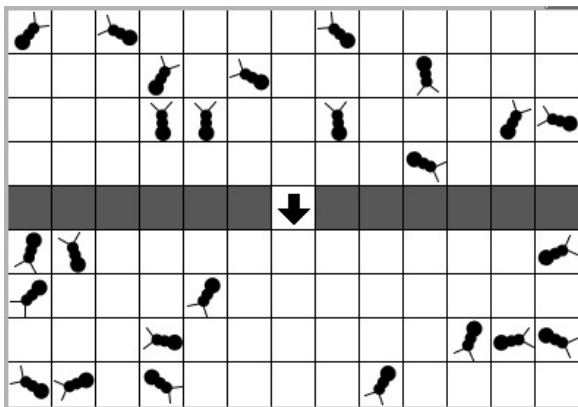
✓ Voor elke bezochte toestand, en voor elke omgeving van die toestand, hoe klein ook, komt het proces vroeg of laat in die omgeving.

(c) Er zijn toestanden zo dat, voor elke omgeving van zo'n toestand, hoe klein ook, het proces vroeg of laat in die omgeving komt.

(d) Er zijn bezochte toestanden zo dat, voor elke omgeving van zo'n toestand, hoe klein ook, het proces vroeg of laat in die omgeving komt.

Antwoord. Item (12a) is “dicht liggen in”. Niet voor alle startwaarden ligt het traject van een chaotisch proces dicht in de toestand-ruimte.

13. Vijfentwintig mieren lopen over een eindig grid dat gescheiden is door een muur en een eenrichtingsdeur.



Er zijn 105 bewandelbare patches. De randen van het grid zijn NIET met elkaar verbonden. Bij aanvang worden mieren willekeurig neergezet. Mieren zijn niet van elkaar te onderscheiden. Ten alle tijde kan op één vakje maar één mier. Mieren bewegen asynchroon naar een buur in de Von Neumann omgeving. Welke van de volgende beweringen is NIET waar? Dit proces bezit ...

(a) ... $\binom{105}{25}$ toestanden.

✓ ... tenminste één absorberende toestand.

(c) ... 25 doorgangsklassen.

(d) ... precies één recurrente klasse.

Antwoord. Een toestand is een configuratie van mieren. Het is belangrijk op te merken dat nooit “verstopping” of deadlock bij de deur kan optreden.

(13a) is waar: bij aanvang moeten 25 uit 105 plekken worden gekozen. (Als mieren van elkaar te onderscheiden waren dan $105 \times \dots \times 81 = 105!/80!$ toestanden. Als mieren bovendien over elkaar heen mogen lopen, dan 105^{25} toestanden. Als mieren niet van elkaar te onderscheiden waren maar wel over elkaar heen mogen lopen dan $105^{25}/25!$ toestanden.)

(13a) is onwaar: alle toestanden kunnen overgaan in een andere toestand: mieren kunnen blijven rondlopen.

(13c) is waar: voor een klasse maakt het alleen maar uit hoeveel mieren zich ten noorden van de deur bevinden, dat varieert van nul tot 25.

(13d) is waar: dat is de klasse waarbij alle mieren zich ten zuiden van de deur bevinden.

14. *i*) Axioma $F - G - G$ en regels $F \rightarrow F - G + F + G - F, G \rightarrow GG$, waarbij $+ = 120^\circ$ en F en G beiden “1 stap vooruit”, genereren de Koch sneeuwvlok.
- ii*) De Kolmogorov complexiteit (algoritmische complexiteit) van een Lindenmayer systeem is eenvoudig te bepalen.

(a) *ii*) en *i*).

(b) Alleen uitspraak *ii*).

(c) Alleen uitspraak *i*).

✓ Geen van beide uitspraken is waar.

Antwoord. Een Lindenmayer systeem is een algoritme om een fractal te genereren. De taal van dat algoritme bestaat uit herschrijfgeregels. De fractal kan met een wellicht kleiner L-systeem of i.h.a. eenvoudiger algoritme worden gegenereerd. Grotere L-systemen hebben een complexiteit die vergelijkbaar is met die van computerprogramma's, en is niet meer zo duidelijk na te gaan.

15. Laat A een complementair opsombare verzameling getallen zijn. Er bestaat een programma, π , die ...

(a) ... ten hoogste alle elementen uit A niet kan afdrukken.

(b) ... ten hoogste alle elementen buiten A kan afdrukken.

(c) ... precies alle elementen uit A niet kan afdrukken.

✓ ... precies alle elementen buiten A kan
afdrukken.

Antwoord. Gewoon de definitie kennen.

16. Geef alle Nash-evenwichten van

	C	D
C	(1, -1)	(0, 4)
D	(-1, 0)	(1, -1)

Zoals gebruikelijk staat (p, q) voor het strategieprofiel waarbij de rij-speler met kans p , en de kolom-speler met kans q samenwerkt.

- (a) $\{(1/6, 1/4)\}$.
 (b) $\{(1/4, 1/6)\}$.
 ✓ $\{(1/6, 1/3)\}$.
 (d) $\{(1/3, 1/6)\}$.

17. Geef het Pareto-front van

	C	D	E
C	(1, 0)	(2, 4)	(4, 2)
D	(1, 3)	(0, 1)	(0, 3)
E	(5, 1)	(2, 1)	(3, 3)

- (a) CD, CE, EC, ED.
 (b) CD, DC, CE, EC.
 ✓ CD, CE, EC, EE.
 (d) Het goede antwoord staat er niet bij.

Antwoord.

	C	D	E
C	xxxxxxx	(2, 4)	(4, 2)
D	xxxxxxx	xxxxxxx	xxxxxxx
E	(5, 1)	xxxxxxx	(3, 3)

18. Een bepaalde 3D-cellulaire automaat werkt met N verschillende toestanden. Omgevingen bestaan uit k cellen. Hoeveel verschillende regels zijn er mogelijk als omgevingen (punt-) symmetrisch zijn en regels rotatie-invariant?

- (a) $k^N/6$
 (b) $N^k/6$
 ✓ $N^k/24$
 (d) Het goede antwoord staat er niet bij.

Antwoord. Markeer één uiteinde van een punt-symmetrische 3D-omgeving en probeer je in te beelden op hoeveel verschillende manieren die omgeving kan worden gedraaid. Dat uiteinde kan aan zes verschillende kanten zitten en dan ook nog eens een keer op vier verschillende manieren zijn gedraaid. Dus één omgeving heeft $6 \times 4 - 1$ kopieën die middels rotatie in elkaar zijn over te voeren. De zes van een dobbelsteen kan zich ook in 24 verschillende posities bevinden, tenminste, als de zes stippen een boven- en een onderkant hebben, anders natuurlijk in 12 verschillende posities.)

Als regels niet rotatie-invariant zijn, zijn er N^k verschillende omgevingen. Als regels wel rotatie-invariant zijn, zijn er $N^k/24$ verschillende omgevingen.

19. Cantor's kam



- i) is overaftelbaar.
 ii) heeft kansmaat nul.
 ✓ i) en ii).
 (b) Alleen uitspraak i).
 (c) Alleen uitspraak ii).
 (d) Geen van beide uitspraken is waar.

20. Een bepaalde cellulaire automaat werkt met N verschillende toestanden waarvan n_q "quiescent". Omgevingen bestaan uit k cellen. Hoeveel waarden kan Langton's λ aannemen?

- (a) $k * (N - n_q)$
 (b) $k * (N - n_q) + 1$.
 (c) N^k .
 ✓ $N^k + 1$.

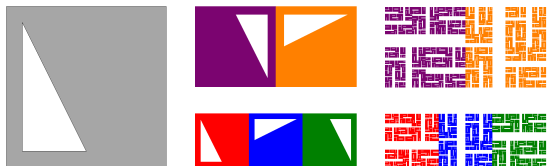
Antwoord. Er zijn N^k verschillende omgevingen dus evenzoveel transitierregels. Lambda geeft aan hoeveel van die transitierregels afbeelden naar een rusttoestand. Dat kan variëren van geen (= 0) tot allemaal (= N^k). Dus $N^k + 1$.

21. Het schaduwlemma voor chaotische systemen kan informeel als volgt worden geformuleerd:

- (a) Alle reële trajecten worden geschaduwd door berekende trajecten.
 (b) Sommige reële trajecten worden geschaduwd door berekende trajecten.

- ✓ Alle berekende trajecten worden geschaduwd door reële trajecten.
- (d) Sommige berekende trajecten worden geschaduwd door reële trajecten.

22. Hieronder zie je de eerste en de tiende iteratie van een IFS fractal. De verkleiningsfactor van de vierkanten zijn 2 respectievelijk 3.



Geef een zo nauwkeurig mogelijk antwoord. De Hausdorff dimensie van deze fractal is bevat in

- ✓ (1.465, 2)
- (b) (1.465, 2.322)
- (c) (1.791, 2)
- (d) (1.791, 2.322)

Antwoord. $\log(5)/\log(3) = 1.465$ en $\log(5)/\log(2) = 2.322$ maar de dimensie zal onder de twee blijven want de fractal is ingebed in het platte vlak en heeft gaten. Het interval (1.791, 2) is te specifiek, dit antwoord had je om welke reden dan ook niet mogen kiezen want de precieze dimensie van de fractal is 1.78788. Met de middelen die tot je beschikking staan is (1.465, 2) het beste antwoord.

23. De replicator-dynamiek kan onder meer worden gebruikt om speelstrategieën te laten evolueren in een populatie. Welke van de volgende twee uitspraken is waar?

- i) Als wordt gestart met een populatie waarin soort A vertegenwoordigd is, dan is het mogelijk dat A uitsterft.

- ii) Als wordt gestart met een populatie waarin soort A niet vertegenwoordigd is, dan is het mogelijk dat A op enig moment toetreedt tot de populatie.

- (a) i en ii .
- (b) Alleen uitspraak i .
- (c) Alleen uitspraak ii .

✓ Geen van beide uitspraken is waar.

Antwoord. Het ligt in de vergelijkingen van de replicator dynamiek besloten dat soorten kunnen uitsterven noch toetreden.

24. Algoritmen voor zwermgedrag (flocking). Welke gedragingen of uitingsvormen kunnen worden aangemerkt als emergent?

- i) Het ontstaan van zwermen.
- ii) Het aantal zwermen.

- (a) i en ii .
- (b) Alleen i .
- ✓ Alleen ii .
- (d) Geen van beiden.

Antwoord. Dát er zwermen ontstaan is wel te verklaren aan de hand van de flocking regels. Hoeveel zwermen er ontstaan is vooraf niet te voorspellen en het is achteraf ook niet te verklaren. Tijdens een animatie ontstaan en verdwijnen ook zwermen.

Einde.

Kladpapier.