Naam: .... Collegekaart-nummer: ....

- Legitimatie verplicht. Geldige documenten zijn: geldig paspoort; geldige identiteitskaart; geldig Nederlands rijbewijs. Een collegekaart is géén geldig legitimatiebewijs tijdens een tentamen.
- Je mag tijdens de eerste 30 minuten de tentamenzaal niet verlaten.
- Op de tafel: legitimatie, tentamenvel, schrijfgerei, A4tje met aantekeningen, eten, drinken.
- Niet op de tafel: al het overige. (Eigen kladpapier, etui, dictaat, slides, elektronische apparatuur incl. smartphones, rekenmachine, mobiel.)
- Het gebruik van markeerstiften is niet toegestaan.
- Als je naar het toilet wilt, steek je je vinger op om een surveillant te waarschuwen. Hij of zij zal je toestemming geven om te gaan en met je meelopen naar het toilet. Toiletbezoek is niet toegestaan tijdens het eerste en het laatste halfuur van het tentamen. Redelijkerwijs gaat de surveillant er vanuit dat je hooguit éénmaal tijdens het tentamen het toilet bezoekt.
- Het is verboden een telefoon of vergelijkbare elektronische apparaten mee naar het toilet te nemen.
- Verplicht inleveren: alle antwoordbladen, ook als ze leeg zijn.
- Niet inleveren: de opgavenbladen.
- Nadat je de tentamenzaal hebt verlaten, is het niet toegestaan je op te houden in de gangen/hal direct buiten de tentamenzaal in verband met geluidsoverlast en toiletbezoek. Je volgt de instructies van de surveillant op.

Vandaag wordt een extra practicum georganiseerd door Jasper en Stan. Vanaf 13:00 uur ben je welkom in Buys-Ballot 109, 112 en 115.

Meerkeuze antwoorden

- Bij elke vraag is steeds precies één antwoord het juiste. In enkele gevallen kunnen andere antwoorden "bijna juist" of "deels juist" zijn. In dergelijke gevallen geldt het beste antwoord.
- Antwoord in de daarvoor bestemde vakjes door een kruisje te plaatsen. Heb je je vergist, kras dan het kruisje door, en zet een kruisje in een ander vakje.
- Het is mogelijk om aan de surveillant een nieuw antwoordvel te vragen. Onze voorraad vellen is eindig, first come first serve.
- Omdat er verschillende versies van de opgaven bestaan, correspondeert de volgorde van de meerkeuzevragen opgaven niet altijd met de volgorde van de stof zoals die behandeld is in de colleges.
- Tip: sla tijdrovende vragen over en bekijk die later.

Succes!

	A	*B*	*C*	*D*
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				

	A	*B*	*C*	*D*
9.				
10.				
11.				
12.				
13.				
14.				
15.				
16.				

	A	*B*	*C*	*D*
17.				
18.				
19.				
20.				
21.				
22.				
23.				
24.				

Kladpapier.

Meerkeuzevragen

1. De verzameling $[0, 1]$ bezit [. . . . . .] elementen als/dan de verzameling $\mathbb{R}$.

   (a) minder

   $\surd$ evenveel

   (c) meer

   (d) Het goede antwoord staat er niet bij.

> **Antwoord.** Zoals op college aangegeven en op werkcollege verder uitgewerkt kan er een bi-jectie worden gemaakt van $(0, 1)$ naar $\mathbb{R}$. Hoe? Zie slides, of zie anders uitwerkingen hoofdstuk oneindigheid. Dus $(0, 1)$ en $\mathbb{R}$ zijn gelijkmachtig (=bezitten evenveel elementen). Het interval $[0, 1]$ bezit twee elementen meer dan het interval $(0, 1)$, te weten 0 en 1. Beide intervallen bezitten oneindig veel elementen, dus de intervallen $[0, 1]$ en $(0, 1)$ zijn ook gelijkmachtig. Dus $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ zijn gelijkmachtig.

2. Welke uitspraak is **niet** waar.

   (a) Elk Gödelnummer representeert een string.

   (b) Elke string bezit een Gödelnummer.

   $\surd$ Elke string bezit meerdere Gödelnummers.

   (d) Het goede antwoord staat er niet bij.

> **Antwoord.** Elke string bezit een uniek Gödelnummer. Immers, in het hele Gödeliseringsproces zijn er geen keuzes te maken.

3. Welke van de volgende verzamelingen is aftelbaar?

   (a) De verzameling van alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$.

   $\surd$ De verzameling van alle mogelijk denkbare computerprogramma's die gevormd kunnen worden op basis van alle tekens die gevormd kunnen worden op een 128×64 dot matrix display.

   (c) De verzameling van alle oneindige bit strings.

   (d) Het goede antwoord staat er niet bij.

> **Antwoord.** De verzameling van alle tekens die gevormd kunnen worden op een 128×64 dot matrix display is eindig. De verzameling van alle mogelijk denkbare strings S die gevormd kunnen worden op basis van een eindige tekensset is aftelbaar. De verzameling van alle mogelijk denkbare computerprogramma's is een deelverzameling van S, dus ook aftelbaar.

4. Stel $X \subset \mathbb{N}$ en $\mathbb{N} \backslash X$ zijn opsombaar. Is lidmaatschap in X beslisbaar?

   $\surd$ Ja: om te beslissen of $x \in X$ kan de uitvoering van de programma's p en q die resp. X en $\mathbb{N} \backslash X$ opsommen worden afgewisseld.

   (b) Ja: om te beslissen of $x \in X$ kunnen de programma's p en q om beurten een getal afdrukken.

   (c) Nee: de programma's p en q die resp. X en $\mathbb{N} \backslash X$ opsommen kunnen op zichzelf niet worden gebruikt om beslisbaarheid aan te tonen.

   (d) Nee: beslisbaarheid is een eigenschap van verzamelingen, en niet van elementen van verzamelingen.

> **Antwoord.** Dit is eigenlijk de stelling van Post. Antwoord 4b is niet goed omdat om beurten afdrukken niet werkt. Het kan namelijk zijn dat één van de programma's al klaar is met afdrukken, zodat we voor niets wachten op dat ene programma voor een volgend getal zonder te weten dat het al klaar is met afdrukken.

5. De Church-Turing these is een

   (a) feit.

   (b) stelling.

   (c) gevolg.

   $\surd$ aanname.

> **Antwoord.** Deze vraag blijkt achteraf ongelukkig, omdat het woord "stelling" ambigu is. Bij item 5b bedoelde ik: *wiskundige stelling*, dat wil zeggen, een wiskundige bewering waarvoor een sluitend bewijs bestaat. Dat is de Church-Turing these niet. De Church-Turing these is een door wetenschappers gezamenlijk gemaakte veronderstelling dat alle Turing-complete berekeningsmechanismen samen het begrip berekenbaarheid vertegenwoordigen. In die zin kan de Church-Turing these zelfs als een "afspraak" of "conventie" worden opgevat. Afspraken kunnen in principiële zin niet worden bewezen.
>
> Maar het woord "stelling" kan ook nog anders worden opgevat, namelijk als *discursieve stelling*, dat wil zeggen als een stellingname die onderbouwd wordt met argumenten in een academische verhandeling. Denk bij het laatste bijvoorbeeld aan een "Master Thesis" of aan een "PhD Thesis". Dit zijn academische werkstukken waarin zaken worden beweerd waarvan verwacht wordt dat de schrijver ze bereid is te verdedigen. Denk bijvoorbeeld aan de verdediging van een proefschrift. Als het woord "stelling" zo gelezen wordt, dan kan de Church-Turing these inderdaad worden opgevat als een stelling.
>
> In de 2016 correctie zal antwoord 5b worden goedgerekend. Verder zal de formulering van Vraag 5 bij eventueel hergebruik worden aangepast.

6. Laat A een complementair opsombare verzameling getallen zijn. Er bestaat een programma, π, die . . .

   (a) . . . ten hoogste alle elementen uit A niet kan afdrukken.

   (b) . . . ten hoogste alle elementen buiten A kan afdrukken.

   (c) . . . precies alle elementen uit A niet kan afdrukken.

   $\surd$ . . . precies alle elementen buiten A kan afdrukken.

> **Antwoord.** Gewoon de definitie kennen.

7. Welke van de volgende uitspraken is **niet** waar?

   (a) $\mathbb{N}$ bevat aftelbaar veel complementair opsombare verzamelingen.

   (b) $\mathbb{N}$ bevat evenveel opsombare als complementair opsombare verzamelingen.

√ $\mathbb{N}$ bevat overaftelbaar veel (complementair-) opsombare verzamelingen.

(d) $\mathbb{N}$ bevat overaftelbaar veel verzamelingen die opsombaar noch complementair opsombaar zijn.

Antwoord. Alle (complementair-) opsombare verzamelingen worden voorgebracht door een computerprogramma. De verzameling computerprogramma's is aftelbaar, dus de verzameling opsombare verzamelingen is ook aftelbaar. Daarmee is de verzameling (complementair-) opsombare verzamelingen is ook aftelbaar, dus ook hun vereniging.

8. Hoeveel van de onderstaande problemen zijn onbeslisbaar?

i) Het inputloze stop-probleem.

ii) Het universele viruschecker probleem.

iii) Het programma-equivalentie probleem.

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

√ 3.

9. Welke van de volgende berekeningsmechanismen is **niet** Turing-compleet?

√ Multiple reduction copy machine (MRCM).

(b) Conway's game of life (2-dimensionale CA).

(c) Rule 110 (1-dimensionale CA).

(d) Langton's ant.

Antwoord. Van de twee CA's zou je op basis van het hoorcollege en/of het boek van Flake meteen moeten weten dat deze TC zijn. Blijven over de MRCM en Langton's ant. De MRCM is een stelsel contracties, en heeft verder weinig te maken met berekening. Deze is dus waarschijnlijk niet TC. Van Langton's ant (cf. boek Flake) is bekend dat deze TC is. Mocht je dat niet weten, dan is de Turing-compleetheid van Langton's ant toch wel waarschijnlijker dan de Turing-compleetheid van MRCMs, omdat met weinig voorstellingsvermogen is in te zien dat de celconfiguraties van Langton's ant zouden kunnen dienen als input voor een computer de deze celconfiguraties leest en op basis daarvan iets doet: Langton's ant.

10. Welke bewering is **niet** waar?

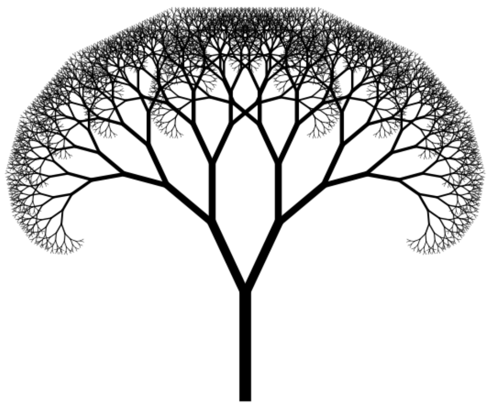
(a) De verzameling van alle opsombare deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ is aftelbaar.

√ Als een verzameling opsombaar is dan is z'n complement dat ook.

(c) Opsombaarheid en semi-beslisbaarheid komen op hetzelfde neer.

(d) Van de meeste deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ is lidmaatschap onbeslisbaar.

11. Van onderstaande boom blijven takken steeds verder splitsen en overlappen takken elkaar niet. (Denk hem in 3D.)



Hoeveel takken bezit deze boom?

(a) Eindig veel.

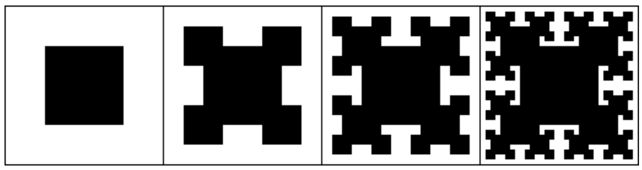
(b) Aftelbaar veel.

(c) Aftelbaar oneindig veel.

√ Overaftelbaar oneindig veel.

Antwoord. Iedere tak correspondeert 1-1 met een oneindige bit string, waarbij 0, zeg, links is, en 1 rechts. Omgekeerd genereert iedere oneindige bit string precies één tak. We gebruiken nu onze kennis van het feit dat de verzameling oneindige bitstrings overaftelbaar oneindig veel elementen bevat.

12. Van de onderstaande fractal is de som van de oppervlakte van de vier kindervierkantjes gelijk aan oppervlakte van een ouder-vierkant, overlap niet meegerekend.



De dimensie van de rand van deze fractal is gelijk aan

(a) $\log 2/\log 4 = 0.5$.

(b) $\log 2/\log 3 \approx 0.6310$.

√ $\log 3/\log 2 \approx 1.5849$.

(d) $\log 4/\log 2 = 2$.

Antwoord. De rand-elementen verkleinen $2\times$ en de twee randstukjes van elk hoekpunt verveelvoudigen zich tot zes randstukjes van een "hoekpunt-knobbel". Het antwoord $\log 4/\log 2 = 2$ is niet goed, dit betreft de *oppervlakte*.

Maar er is een makkelijker manier om het goede antwoord er uit te pikken: een rand heeft een dimensie tussen de 1 en de 2, de getallen 1 en 2 inbegrepen. Maar 2 is bij nader inzien niet erg waarschijnlijk want dat is de dimensie van de oppervlakte van de fractal zelf. Dus blijft 1.5849 over.

13. Beschouw een cellulaire automaat met 9 cellen die elk 2 verschillende toestanden kunnen aannemen. Bij aanvang wordt de automaat in een specifieke toestand gebracht. Na 1000 iteraties blijkt de toestandruimte (ook wel: globale configuratie) na elke iteratie nog steeds te veranderen en wordt het experiment gestopt. Wat is de sterkste conclusie die getrokken kan worden?

(a) Geen enkele conclusie.

(b) De automaat convergeert niet.

$\surd$ De automaat is beland in een cyclus.

(d) De automaat vertoont chaotisch gedrag.

> **Antwoord.** Er zijn $2^9 = 512$ verschillende toestandruimten (globale configuraties). Na iteratie 512 kan er geen nieuwe toestandruimte worden bezocht en belandt de automaat in een cyclus als het dat al niet eerder deed.

14. Volgens een stelling van van de Finse wiskundige/informaticus Jarkko Kari bezit elke CA tenminste één globale configuratie C met de volgende eigenschap.

(a) C komt oneindig vaak terug.

(b) Een deel van C komt oneindig vaak terug.

√ Een steeds groter deel van C komt oneindig vaak terug.

(d) De automaat convergeert naar een steeds groter deel van C.

> **Antwoord.** Het is bijvoorbeeld niet zo dat de automaat naar een steeds groter deel van C convergeert, omdat in tussenliggende iteraties dergelijke delen van C niet per se hoeven te worden aangenomen.

15. Welke geometrische oppervlakken bieden in vergelijking met een rechthoek, een tweemaal zo grote oppervlakte ten behoeve van de toestandenruimte van een CA omdat er geen sprake is van een voor- en achterkant?

i) Torus

ii) Möbius band

iii) Fles van Klein

iv) Projectief vlak

(a) Alleen *i)* en *ii)*.

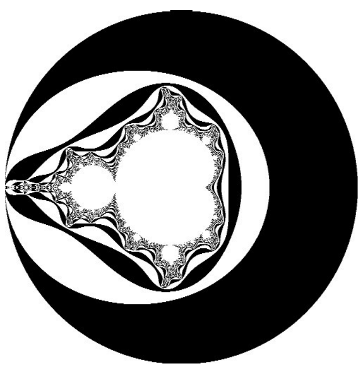
(b) Alleen *ii)* en *iii)*.

(c) Alleen *iii)* en *iv)*.

√ Het goede antwoord staat er niet bij.

> **Antwoord.** Alleen *i)* niet.

16. Onderstaande figuur



verbeeldt het volgende: tel het aantal iteraties van de functie $z \mapsto z^2 + c$ met constante c op startwaarde ...

(a) ... $z_0 = 0$ totdat $|z| \geq 2$. Als dit aantal oneven is, wordt c wit gekleurd, anders zwart.

(b) ... z_0 totdat $|z| \geq 2$. Als dit aantal oneven is, wordt z_0 wit gekleurd, anders zwart.

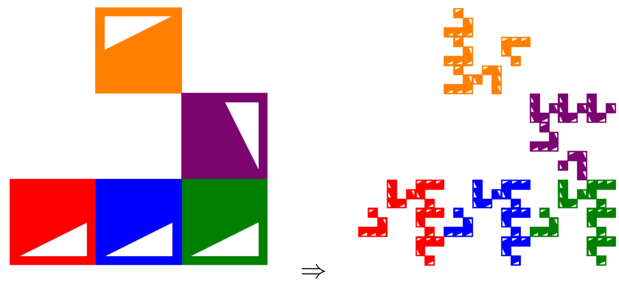
√ ... $z_0 = 0$ totdat $|z| \geq 2$. Als dit aantal oneven is, wordt c zwart gekleurd, anders wit.

(d) ... z_0 totdat $|z| \geq 2$. Als dit aantal oneven is, wordt z_0 zwart gekleurd, anders wit.

Hint: antwoorden 16a en 16b verschillen in het variëren op c respectievelijk z_0. De laatste twee antwoorden zijn gelijk aan de eerste twee antwoorden met de kleuren omgedraaid.

> **Antwoord.** Buiten $|z| < 2$ geldt al $|z| \geq 2$, en hoeft er geen enkele keer te worden geïtereerd om te concluderen dat $|z| \geq 2$. Ver (we weten niet precies hoe ver) binnen de Mandelbrötfractal wordt er een oneindig aantal keren geïtereerd, dat is ook wit. Daartussenin oneven = zwart. Antwoord 16d en 16b betreffen de Julia fractal.

17. Nieuwe inzichten ontstaan door schijnbaar ongerelateerde zaken met elkaar te verbinden. Laten we een fractal maken van een glider in Conway's life:



De (Hausdorff-) dimensie van deze fractal is gelijk aan:

(a) $\log(3)/\log(5)$

√ $\log(5)/\log(3)$

(c) Valt niet te zeggen, want het referentiekader ontbreekt.

(d) Valt niet te zeggen, want de verkleiningsfactor is niet gespecificeerd.

> **Antwoord.** De laatste twee antwoorden zijn niet meteen helemaal verkeerd, echter, dankzij het tweede plaatje zijn nu juist het referentiekader en de verkleiningsfactor af te leiden. De fractal wordt op eenzelfde gebied afgebeeld (bv. eenheidsvierkant op eenheidsvierkant). Verder sluiten de beelden precies op elkaar aan, dus de verkleiningsfactor is gelijk aan 3.

18. Beschouw een rechthoek waarvan de randen geïdentificeerd zijn tot het oppervlak van een torus. Er wordt een turtle op dit oppervlak gezet zó dat deze een hoek van 30^0 maakt met beide identificatie-randen. (Merk op dat de richtingscoëfficiënt die de turtle maakt met beide identificatie-randen daardoor niet rationaal is.) Vervolgens beweegt deze turtle steeds maar in dezelfde richting. Deze beweging is

(a) Stabiel.

(b) Periodiek.

√ Quasi-periodiek.

(d) Chaotisch.

> **Antwoord.** De turtle komt nooit meer op dezelfde plek terug, en de beweging is niet extreem gevoelig voor startwaarden.

19. Wat zijn kenmerken van chaotisch gedrag?

    i) Deterministisch.

    ii) Quasi-periodiek.

    iii) Mixing (er is een punt dat, geïtereerd, dicht ligt in de toestandruimte).

    (a) *i)* en *ii)*.

    √ *i)* en *iii)*.

    (c) *ii)* en *iii)*.

    (d) Het goede antwoord staat er niet bij.

20. Hoeveel van de volgende systemen vertonen chaotisch gedrag?

    i) De wrijvingsloze pendule (bewegend in een plat vlak).

    ii) De pendule (met wrijving, bewegend in een plat vlak).

    iii) De magnetische pendule (bewegend in of langs een sferische kap).[1]

    (a) 0

    √ 1

    (c) 2

    (d) 3

21. Wat is een “strange attractor”?

    (a) Een verzameling punten waar een systeem op een onverklaarbare manier altijd naar toe beweegt, hoe de beginwaarden van dat systeem ook zijn.

    √ Een niet-triviaal geometrisch figuur waar een systeem altijd naar toe beweegt, hoe de beginwaarden van dat systeem ook zijn.

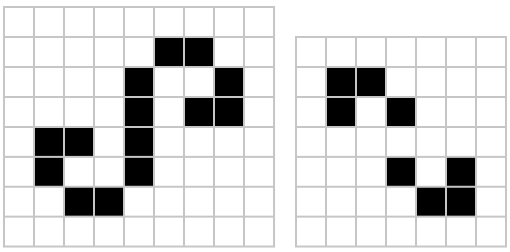
    (c) Een dynamische bifurcatie in een systeem van gekoppelde differentievergelijkingen.

    (d) Een non-deterministische bifurcatie in een systeem van gekoppelde differentievergelijkingen.

22. Welke van de volgende beweringen zijn waar?

    i) De linkerfiguur is stabiel.

    ii) De rechterfiguur is een oscillator.



    (a) Geen van beiden.

    (b) Alleen *i)*.

    (c) Alleen *ii)*.

    √ Zowel *i)* als *ii)*.

Hint: tel slim. Neem de figuur over, schrijf het aantal buren in een vakje en let op symmetrie.

23. Een bal rolt in een biljart van $4 \times 3\text{m}^2$ en volgt normale fysieke wetten, behalve dat de bal niet door wrijving wordt afgeremd. Het biljart bezit ronde dan wel rechte binnenhoeken. Door een stoot van de keu begint de bal te rollen met een bepaalde richtingscoëfficient t.o.v. de lange zijde van het biljart.

    i) Rechte binnenhoeken, rationale richtingscoëfficient.

    ii) Ronde binnenhoeken, rationale richtingscoëfficient.

    iii) Rechte binnenhoeken, irrationale richtingscoëfficient.

Het gedrag onder *i)*, *ii)* en *iii)* is respectievelijk:

    (a) periodiek, semi-periodiek, chaotisch.

    √ periodiek, chaotisch, semi-periodiek.

    (c) semi-periodiek, semi-periodiek, chaotisch.

    (d) semi-periodiek, chaotisch, semi-periodiek.

> **Antwoord.** Bij een rationale richtingscoëfficient is er periodiek gedrag. Bij een irrationale richtingscoëfficient is er semi-periodiek gedrag. Zodra een biljart ronde hoeken heeft is er sprake van een Bunimovich’ stadium. In een dergelijk model is er altijd sprake van chaotisch gedrag.

Beschouw de (standaard) logistieke rij

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n),$$

waarbij de startwaarde x_0 gekozen wordt uit $[0, 1]$, $x_n \in [0, 1]$ en $r \in [0, 4]$ constant.

Welke van de volgende beweringen zijn waar?

24. *i)* Voor elke $K \in \mathbb{N}$ bestaan er één of meer waarden van r, zo dat voor alle startwaarden $0 < x_0 < 1$ de logistieke rij periode K heeft. (Hint: bifurcatiediagram.)

    ii) Er bestaan er één of meer waarden van r zo dat voor elke $K \in \mathbb{N}$ een startwaarde $0 < x_0 < 1$ bestaat, zo dat de logistieke rij periode K heeft. (Hint: chaos.)

    (a) Geen enkele.

    (b) Alleen *i)*.

    (c) Alleen *ii)*.

    √ Beiden.

[1] Snij een kapje van een sinaasappel af. Eet uit dit kapje het vruchtvlees op. Wat je overhoudt is een stuk schil in de vorm van een sferische kap.

Antwoord.

- De waarheid van *i)* is het makkelijkst in te zien door te kijken naar het bifurcatiediagram van de logistieke rij. Daarin zijn onmiddellijk rijen met periodes 2, 4, 8, 16, ... te zien. Verderop zijn is er een rij met periode 3 te zien, met periode 5, met periode 7, met periode 6. Was je onbekend met de waarheid van *i)*, dan maakt dit alsnog *i)* plausibel.
- Item *ii)* is waar dankzij het gegeven

  periode 3 $\Leftrightarrow$ chaos.

  Voor $r = 4$ is bekend dat de logistieke rij zich chaotisch gedraagt. Dus bestaat er voor elke gewenste periode $K \in \mathbb{N}$ een startwaarde $x_0 \in [0, 1]$ zodanig dat de logistieke rij een (weliswaar instabiele) cyclus met periode K vertoont.

Einde.

Nog meer kladpapier.