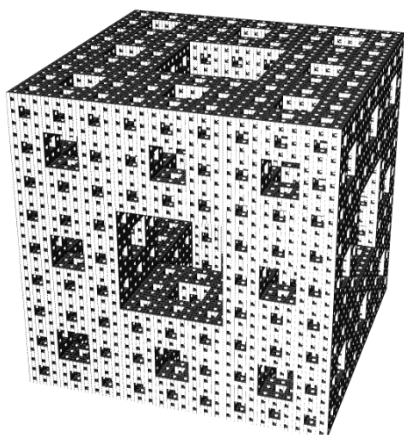


Dit tentamen duurt twee uur en telt 32 vragen. Bij elke vraag is steeds precies één antwoord het juiste. Wel kunnen andere antwoorden “bijna juist” of “deels juist” zijn. Mochten er meerdere goede antwoorden zijn, dan geldt het beste antwoord. Omdat er verschillende versies van de opgaven bestaan, correspondeert de volgorde van de opgaven niet altijd met de volgorde van de stof zoals die behandeld is in de colleges.

Het gebruik van elektronische apparatuur, inclusief rekenmachines, is verboden. Het doorseinen van antwoorden, in welke vorm dan ook, wordt gewaardeerd met een nul.

Veel succes!

1. De fractale dimensie van Menger's spon



is gelijk aan

- (a) $\log 3 / \log 27$
- (b) $\log 27 / \log 3$
- (c) $\log 3 / \log 20$
- ✓ $\log 20 / \log 3$

2. Welke van de hieronder gegeven termen zijn alternatieve aanduidingen voor de term “iterated function system”?

- i) Iterated non-linear fractal.
- ii) Multiple reduction copy machine.
- iii) A system of linear contractions.
- iv) Recursive function system.

- (a) i) en ii).
- ✓ ii) en iii).
- (c) iii) en iv).
- (d) Het goede antwoord staat er niet bij.

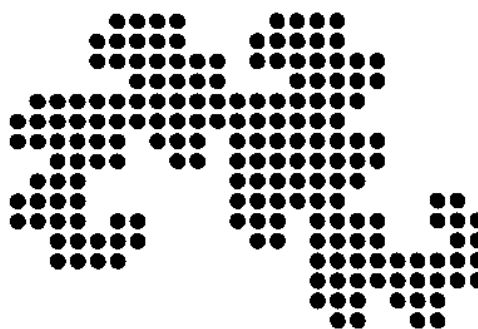
3. Voer het volgende gedachte-experiment uit. Neem een strook papier. Vouw deze dubbel, zodanig dat de vouw kort is, en het resultaat even breed maar half zo lang. Zet de gevouwen strook rechtop, met de vouw naar boven. Vouw de dubbelgevouwen strook nog een keer op dezelfde manier, door de vorige vouw naar je toe en vervolgens naar de onderkant te bewegen. De vierdubbelgevouwen strook is nu nog steeds even breed maar vier keer zo kort. Herhaal de laatste handeling een eindig aantal keren. Ontvouw de strook, zó dat elke vouw een hoek van 90^0 maakt. Welke curve wordt zo verkregen?

- ✓ De dragon curve.
- (b) De Hilbert Curve.
- (c) De Koch curve.
- (d) De Peano curve.

4. Flake plaatst Lindenmayer-systemen in de Chomsky hiërarchie van formele talen. Volgens hem kunnen L-systemen worden gezien als een bepaald type grammatica waarin non-terminals parallel worden herschreven. (Meerdere turtles tegelijkertijd worden aangestuurd.) Naar welk grammaticaal type refereert Flake?

- (a) De reguliere grammatica.
- ✓ De context-vrije grammatica.
- (c) De context-gevoelige grammatica.
- (d) De semi-beslisbare grammatica.

5. Geef het IFS dat hoort bij de volgende afbeelding.



(a) Het systeem

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) Het systeem

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(c) Het systeem

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

✓ Het systeem

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6. De Julia fractal kan worden verkregen door de volgende vraag te beantwoorden:

- (a) Voor welke waarden van c convergeert de iteratie van $z^2 + c$ in het complexe vlak? (Start met $z = 0$.)
- (b) Voor welke waarden van c convergeert de iteratie van $2^z + c$ in het complexe vlak? (Start met $z = 0$.)
- ✓ Voor welke waarden van z convergeert de iteratie van $z^2 + c$ in het complexe vlak? (Houdt c constant.)
- (d) Voor welke waarden van z convergeert de iteratie van $2^z + c$ in het complexe vlak? (Houdt c constant.)

★ Antwoord (a) definieert de Mandelbrot fractal.

7. De kleuren in de Mandelbrot fractal kunnen worden gegenereerd door de volgende methode.

- (a) Meet de afstand tot $(2, 0)$ na, zeg, 50 iteraties.
- (b) Meet de afstand tot de eenheidscirkel na, zeg, 50 iteraties.
- (c) Tel het aantal iteraties voordat je buiten de eenheids-cirkel komt.
- ✓ Tel het aantal iteraties voordat je verder dan twee van de oorsprong af komt.

8. Het aantal verschillende regels van een 2-dimensionale cellulaire automaat met radius R en aantal toestanden K , waarin de toestand van de cel zelf ook meetelt, is gelijk aan:

- (a) $(2R + 1)^{K^{(2R+1)^2}}$, i.e., $(2R + 1)^{(K \wedge (2R + 1)^2)}$
- ✓ $K^{K^{(2R+1)^2}}$, i.e., $K \wedge (K \wedge (2R + 1)^2)$
- (c) $K^{(2R+1)^{K^2}}$, i.e., $K \wedge ((2R + 1) \wedge K^2)$
- (d) Het goede antwoord staat er niet bij.

9. Bekijk de volgende drie uitspraken over chaos.

- i) Chaos is een deterministisch proces.
- ii) Chaos is reproduceerbaar.
- iii) Chaos is asymptotisch ergodisch: elke bezochte toestand wordt op den duur willekeurig dicht benaderd.
- (a) Alleen uitspraken i) en ii) zijn waar.
- (b) Alleen uitspraken i) en iii) zijn waar.
- (c) Alleen uitspraken ii) en iii) zijn waar.
- ✓ Het goede antwoord staat er niet bij.

10. Beschouw de logistische vergelijking $x \mapsto rx(1 - x)$ op het interval $(0, 1)$ waarbij $r \in [0, 4]$. De verschillende waarden van r worden onderverdeeld in intervallen:

- 1: $r \in [0, 1)$ 5: $r \in [1 + \sqrt{6}, 3.54)$
- 2: $r \in [1, 2)$ 6: $r \in [3.54, 3.57)$
- 3: $r \in [2, 3)$ 7: $r \in [3.57, 4]$.
- 4: $r \in [3, 1 + \sqrt{6} \approx 3.45)$

Het gedrag bij oneindige iteratie kan voor deze intervallen als volgt worden omschreven:

- A. Bijna altijd cyclisch met periode 4.
- B. Bijna altijd chaotisch gedrag (soms weer periodiek).
- C. Monotone convergentie naar $(r - 1)/r$.
- D. Bijna altijd cyclisch met periode 2.
- E. Convergentie naar nul.
- F. Alternierende convergentie naar $(r - 1)/r$.
- G. Bijna altijd cyclisch met periode 2^n , $n > 2$.

Koppel het juiste gedrag aan de juiste intervallen.

- (a) 1:D, 2:A, 3:G, 4:E, 5:C, 6:F, 7:B.
- (b) 1:G, 2:B, 3:E, 4:C, 5:F, 6:D, 7:A.
- (c) 1:D, 2:A, 3:G, 4:B, 5:E, 6:C, 7:F.
- ✓ 1:E, 2:C, 3:F, 4:D, 5:A, 6:G, 7:B.

11. Wat zegt de Pareto verdeling (ook wel: Zip's regel) over de verdeling van de omvang van lawine's in cellulaire automaten die gebouwd zijn om zandhopen te simuleren?

- (a) Een lawine met omvang s vindt plaats met kans $P(X = s) = e^{-\lambda} \lambda^s / s!$.
- (b) Een lawine met omvang s vindt plaats met kans $P(X \leq s) = e^{-\lambda} \lambda^s / s!$.
- ✓ De frequentie f van lawines met een bepaalde omvang is omgekeerd evenredig aan de omvang s volgens $f(s) = as^{-b}$.
- (d) De frequentie f van lawines met een bepaalde omvang is omgekeerd evenredig aan de omvang s volgens $f(s) = a \log(s) s^{-b}$.

★ Syllabus, Chapter 2, p. 35.

12. Noem twee mogelijke effecten van de combinatie van evolutie en leren.

- (a) Bratley effect en Lamarckiaans leren.
- (b) Bratley effect en latent leren.
- ✓ Baldwin effect en Lamarckiaans leren.
- (d) Baldwin effect en latent leren.

★ Syllabus, Chapter 2, pp. 27-28.

13. Het schaduwlemma voor chaotische systemen kan informeel als volgt worden geformuleerd:

- (a) Alle reële trajecten worden geschaduwd door berekende trajecten.
- (b) Sommige reële trajecten worden geschaduwd door berekende trajecten.
- ✓ Alle berekende trajecten worden geschaduwd door reële trajecten.
- (d) Sommige berekende trajecten worden geschaduwd door reële trajecten.

14. Flake bespreekt Kolmogorov-complexiteit als een maat voor de complexiteit van fractals en andere constructies. Zelf noemt hij deze maat overigens "algoritmische complexiteit" en verwijst in een voetnoot naar de officiële term "Kolmogorov-complexiteit". Welke fractal bezit de hoogste Kolmogorov-complexiteit?

- ✓ Een IFS met 1000 verschillende contractiefuncties.
- (b) Sierpinski's tapijt (volledig uitgeïtereerd).
- (c) De Mandelbrot set (volledig uitgeïtereerd).
- (d) De Hilbert curve (volledig uitgeïtereerd).

★ Het gaat om de maximale lengte van het kortste programmaatje dat nodig is om een bepaalde fractal te produceren. Sierpinski's tapijt, de Mandelbrot set en de Hilbert curve zijn allemaal met relatief redelijk korte programmaatjes te genereren. Echter, het is onmogelijk de informatie die is vervat in 1000 wezenlijk verschillende contracties in R^2 te comprimeren tot een even kort programmaatje van vergelijkbare lengte. Immers, alle $1000 \times (4 + 2) = 6000$ matrix entries moeten een plaats krijgen in dat programmaatje.

15. De logistieke map is een voorbeeld van een discreet dynamisch systeem. Een stelsel Lotka-Volterra vergelijkingen is een voorbeeld van een continu dynamisch systeem.

Welke van de volgende beweringen zijn *niet* waar?

- i) Discrete syst. kunnen zich chaotisch gedragen in $[0, 1]$.
- ii) Discrete syst. kunnen zich chaotisch gedragen in $[0, 1]^2$.
- iii) Discrete syst. kunnen zich chaotisch gedragen in $[0, 1]^3$.
- iv) Continue syst. kunnen zich chaotisch gedragen in $[0, 1]$.
- v) Continue syst. kunnen zich chaotisch gedragen in $[0, 1]^2$.
- vi) Continue syst. kunnen zich chaotisch gedragen in $[0, 1]^3$.

✓ iv) en v).

(b) v) en vi).

(c) iv) en vi).

(d) Het goede antwoord staat er niet bij.

16. In de context van genetische algoritmen wordt onder de term “bitmask” een patroon van bits verstaan.

✓ Een bitmask geeft aan op welke plekken chromosomen bij kruising hun materiaal mogen uitwisselen.

(b) Een bitmask verifieert of een schema nog in een populatie aanwezig is.

(c) Een bitmask verifieert met welk percentage een schema nog in een populatie aanwezig is.

(d) Een bitmask is een hulpconstructie om zg. kritieke plekken in chromosoomschema's te definiëren.

★ Syllabus, Chapter 3.

17. Reynolds (1987) formuleert drie imperatieven voor flocking. Gary Flake (1999) formuleert er vier:

i) Move away from nearby neighbours that are too close, so as to reduce the chance of collisions.

ii) Fly in the direction to which nearby neighbours are heading.

iii) Minimise exposure to the flocks exterior by moving toward the perceived center of nearby neighbours.

iv) Move away from view-blocking nearby neighbours.

Welke regel is door Flake later toegevoegd?

(a) i).

(b) ii).

(c) iii).

✓ iv).

18. Welke van de volgende beweringen over toernooi-selectie zijn waar?

(i) De toernooi-grootte kan in principe vrij gekozen worden, tussen nul en de populatiegrootte.

(ii) Toernooi-selectie is lastiger te implementeren dan FPS.

(iii) Toernooi-selectie is inefficiënter (rekenintensiever) dan FPS.

(iv) De gebruikelijke toernooi-grootte ligt tussen de twee en drie.

(a) Bewering (18i) en (18ii).

(b) Bewering (18ii) en (18iii).

(c) Bewering (18i) en (18iv).

✓ Een andere combinatie van beweringen is waar.

★ Alleen (18iv) is waar.

19. Een genotype van een populatie van individuen wordt gerepresenteerd door bitstrings ter lengte N . We beschouwen een kruising waarbij de eerste ouder bestaat uit allemaal nullen, terwijl de tweede ouder bestaat uit allemaal enen. Geef aan hoeveel verschillende soorten kinderen er kunnen ontstaan als er op inwendige en oneigenlijke (uitwendige) punten mag worden gekruist.

(a) $2(N - 1)$.

✓ $2N$.

(c) $2N + 1$.

(d) $2(N + 1)$.

★ Laten we een locatie tussen twee bits, of voor de eerste bit, of na de laatste bit, een *snijpunt* noemen. Een snijpunt is dus een punt waarop je een string in tweeën kunt knippen. Een bitstring ter lengte N heeft dus $N + 1$ snijpunten. Laten we de twee uitwendige snijpunten *oneigenlijk* noemen, want als je daar knipt gebeurt er eigenlijk niets. De reden om oneigenlijke snijpunten toch mee te nemen in de beschouwing is dat ze handig zijn voor randgevallen.

Voor $N \leq 2$ zijn er $N - 1$ inwendige punten waarop je kunt snijden (als je helemaal vooraan of achteraan snijdt, levert dat geen kruising op). Elk snijpunt levert twee verschillende kinderen op. Dat levert in totaal $2(N - 1)$ verschillende kinderen voor $N \geq 2$, en geen kinderen voor $N = 0$ of $N = 1$.

Als je wél toelaat op de buitenkanten te snijden, dan levert dat $2(N - 1) + 2 = 2N$ verschillende kinderen op. [Niet $2(N + 1)$, want de twee uitwendige snijpunten leveren beiden dezelfde kinderen. Je moet daar dus weer 2 van af trekken.] Voor de flauwerikken die lege bitstrings ook interessant vinden moeten we er volledigheidshalve nog aan toevoegen dat $N \geq 1$.

20. Het atoom p is gebonden aan de lijst $(+ 2 3)$ [dus niet aan het getal 5]; het atoom q is gebonden aan de lijst $(* 4 5)$. We evalueren de volgende twee s -expressies:

(a) $(eval (+ p q))$

(b) $(+ (eval p) (eval q))$

Krijgen we dezelfde uitkomst?

(a) Ja.

✓ Nee, (20a) geeft een run-time error.

(c) Nee, (20b) geeft een run-time error.

(d) Nee, beide expressies evalueren naar verschillende waarden.

21. Geef het aantal mogelijke kruisingen van

```
(if (food-ahead)
  (eat)
  (if (< (random) 0.5)
    (left)
    (right)))
```

en

```
(while (not food-ahead) (move)).
```

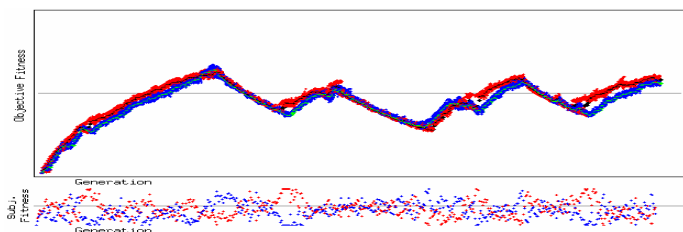
- (a) 9.
 ✓ 10.
 (c) 14.
 (d) 16.

★ Eerste statement: 4 statements, 2 tests. Tweede statement: 2 statements, 1 test. Totaal $4 \times 2 + 2 \times 1 = 10$ mogelijke kruisingen.

22. Het principe van de Rode Koningin gaat over het volgende.

- (a) Bij selectie dient in ieder geval het meest fitte individu meegenomen te worden naar de volgende generatie.
 ✓ In co-evolutie moeten individuen blijven verbeteren om fit te blijven.
 (c) In mierenkolonie-optimalisatie is het voordelig bepaalde acties centraal te laten coördineren door een mier met extra kennis, bv. variabelen die de tot dan toe kortste route bijhouden. Het is nutteloos als alle mieren dit doen.
 (d) Exploratie op feromoon wordt bepaald door de laatste winnaar.

23. De volgende grafiek is een weerslag van een typisch verschijnsel in co-evolutie, als relatieve fitness niet noodzakelijk transitief is.



- i) De algemene tendens wordt veroorzaakt over-specialisatie.
 ii) Perioden van dalende gemiddelde absolute fitness worden veroorzaakt door de afwezigheid van selectiedruk. (Afwezigheid van selectiedruk wordt ook wel “drift” genoemd.)

- (a) Beide beweringen zijn waar.
 (b) Alleen bewering i) is waar.
 (c) Alleen bewering ii) is waar.
 ✓ Beide beweringen zijn onwaar.

24. John Holland publiceerde in 1975 de zg. *schema-stelling*. Deze stelling wordt algemeen beschouwd als de eerste theoretische onderbouwing voor genetisch programmeren. Een versie van de schema-stelling is de volgende.

$$p(H_{t+1}) \geq p(H_t) \frac{|H_t| f(H_t)}{|X_t| f(X_t)} (1 - \epsilon_c)(1 - \epsilon_m)$$

Waar staan de getallen ϵ_c en ϵ_m voor?

- (a) Voor de kans op kruising en de kans op mutatie.
 ✓ Voor de kans op schema-vernietiging door kruising en de kans op schema-vernietiging door mutatie.
 (c) Voor het deel chromosomen dat in de overgang $t \rightarrow t + 1$ is gekruist en het deel chromosomen dat in de overgang $t \rightarrow t + 1$ is gemuteerd.

- (d) Voor de schema-proportie dat in de overgang $t \rightarrow t + 1$ is gekruist en de schema-proportie dat in de overgang $t \rightarrow t + 1$ is gemuteerd.

25. Geef een definitie van de notie “zelf-similariteit”.

- (a) Het voorkomen van één of meer identieke patronen in cellulaire automaten.
 ✓ Een constante contractie.
 (c) Mimese (kopieergedrag) in mierenkolonies.
 (d) Als in evolutionair programmeren de afkomst identiek is aan de ouders (bij ongeslachtelijke voortplanting) of één van de ouders (bij geslachtelijke voortplanting).

26. Beschouw de volgende grammatica voor het genereren van rekenkundige expressies:

```
<expr> ::= ( <expr> <op> <expr> )
          | <atom>
<op>    ::= + | - | * | /
<atom>  ::= <var> | <num>
<var>   ::= h | v | m
<num>   ::= 0 | 0.1 | 0.5 | 1 | 5 | 10
          | 50 | 100
```

Als chromosomen nemen we bitstrings met lengte 10. Hoe groot moet de lengte van een codon minimaal zijn om alle grammaticaal geldige expressies te kunnen genereren?

- ✓ Drie.
 (b) Vier.
 (c) Acht.
 (d) Het goede antwoord staat er niet bij.

★ Drie is net genoeg. Voor $\langle \text{num} \rangle$ zijn er immers precies 2^3 keuzen.

27. We gebruiken de gegevens in Vraag 26 en nemen aan dat codons een vastgestelde lengte 4 bezitten. Geef de minimale waarde van *maxwrap* om de bitstring “11111” (vijf enen) een expressie zonder non-terminals te laten produceren. (De Netlogo JGE extensie past wrapping net even iets anders toe dan wat theoretisch is voorgeschreven. Je mag één van beide noties van wrapping toepassen, i.e. die van Netlogo of de theoretische, zolang dat maar consistent gebeurt.)

- (a) Nul.
 (b) Twee.
 (c) Vijf.
 ✓ Het goede antwoord staat er niet bij.

★ De theorie en JGE doen beiden iets anders. Bij de eerste codon “1111” is duidelijk wat te doen. Omdat er vijf regels zijn kiezen we regel met index $15 \bmod 5 = 0$. De tweede codon kan gekozen worden als “1” (één bit in plaats van vier) of “1111” (vier enen, de laatste 1 van de string, daarna wrappen zodat we drie enen van het begin van de string consumeren). Theoretisch is de laatste interpretatie correct. In dat geval krijgen we dus de waarde “1111” (binair) = 15 (decimaal) = $\langle \text{expr} \rangle \langle \text{op} \rangle \langle \text{expr} \rangle$, waardoor we de boom blijven vergroten en we na vier wraps nog geen correcte expressie hebben.

JGE en Netlogo JGE doen het anders. Deze lezen de laatste overgebleven bit als 1 (decimaal), zodat de expansie verloopt volgens de regelindices $0, 1, 0, 1, \dots$. Het vereist in ieder geval meer dan vijf regeltoepassingen om een volledig uitontwikkelde expressie te verkrijgen.

28. Welke van de volgende verzamelingen zijn aftelbaar?

- i) Alle eindige bitstrings.
 - ii) Alle, mogelijk aan één kant oneindig doorlopende, bitstrings.
 - iii) Alle, mogelijk aan twee kanten oneindig doorlopende, bitstrings.
- (a) Geen.
 ✓ Alleen i).
 (c) Alleen i) en ii).
 (d) Allemaal.

★ Deze vraag is afgekeurd. De reden hiervoor is dat in onderdeel i) van de oorspronkelijke vraagstelling het woord “eindige” ontbrak. Daardoor was de formulering in i) oorspronkelijk ambigu.

29. Welke van de volgende beweringen zijn waar?

- (i) Als de verzamelingen A_1, \dots, A_n stuk voor stuk aftelbaar zijn, dan is de vereniging

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup \dots \cup A_n$$

dat ook.

- (ii) Als de verzamelingen A_1, \dots, A_n stuk voor stuk aftelbaar zijn, dan is het Cartesisch product

$$\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times \dots \times A_n$$

dat ook.

- (iii) Als de aftelbaar oneindige rij van verzamelingen A_1, \dots, A_i, \dots stuk voor stuk aftelbaar zijn, dan is de aftelbare vereniging

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup \dots \cup A_i \cup \dots$$

dat ook.

- (iv) Als de aftelbaar oneindige rij van verzamelingen A_1, \dots, A_i, \dots stuk voor stuk aftelbaar zijn, dan is het aftelbare Cartesisch product

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \times \dots \times A_i \times \dots$$

dat ook.

- (a) (29i) en (29ii).
 ✓ (29i), (29ii) en (29iii).
 (c) (29i), (29ii) en (29iv).
 (d) Het goede antwoord staat er niet bij.

30. Van $A \subseteq \mathbb{N}$ is gegeven dat deze co-opsombaar (Eng.: co-recursively enumerable) is. Een corresponderend algoritme heeft inmiddels vier getallen afgedrukt: 37, 12, 9, en 111 (in die volgorde). Welk van de volgende uitspraken is waar?

- (a) $\{9, 12, 37, 111\} \subseteq A$.
 ✓ $\{9, 12, 37, 111\} \cap A = \emptyset$.
 (c) $[1, 111] \cap \mathbb{N} \subseteq A$.
 (d) $[1, 111] \cap \mathbb{N} \cap A = \emptyset$.

★ Als A co-r.e. is dan bestaat er een algoritme dat precies alle elementen uit $\mathbb{N} \setminus A$ afdrukt. Het enige dat we weten als dit algoritme 37, 12, 9, en 111 heeft afgedrukt, is dat deze getallen niet in A zitten.

31. Zij $A \subseteq \mathbb{N}$ willekeurig.

- i) A is beslisbaar (Eng.: recursive, of: decidable).
 - ii) A en $\mathbb{N} \setminus A$ zijn opsombaar (Eng.: recursively enumerable, of: semi-decidable).
- (a) $i) \Rightarrow ii)$ maar niet omgekeerd.
 (b) $ii) \Rightarrow i)$ maar niet omgekeerd.
 ✓ $i) \Leftrightarrow ii)$.
 (d) Het goede antwoord staat er niet bij.

★ Dit is de stelling van Post.

32. (Iets moeilijker.) Welke van de volgende problemen zijn beslisbaar?

- i) Bepaal of een willekeurig Java-programma in 10,000 of minder instructies stopt.
 - ii) Bepaal of een willekeurig Java-programma 10,000 of minder karakters afdrukt.
- (a) Beide niet.
 (b) Alleen i).
 (c) Alleen ii).
 (d) Zowel i) als ii).

★ Probleem (i) is beslisbaar. Dat is makkelijk in te zien: laat J een Java-programma zijn waarvan moet worden bepaald of het in 10,000 of minder instructies stopt. Simuleer J en houdt tijdens de simulatie het aantal instructies bij. Rapporteer JA als de simulatie in 10,000 of minder instructies stopt. Rapporteer anders NEE en stop.

Probleem (ii) is onbeslisbaar. Dat is wat moeilijker in te zien. Een bewijsje kan gegeven worden uit het ongerijmde: als dit probleem beslisbaar was, dan zou het (onbeslisbare) stop-probleem ook beslisbaar zijn, als volgt.

Laat J een willekeurig Java-programma zijn waarvan moet worden bepaald of het stopt. Laat Java-programma J' ontstaan uit J door er een laatste instructie aan toe te voegen die 10,001 of meer karakters afdrukt. (Bijvoorbeeld 10,001 spaties. Om er voor te zorgen dat J' niet eerst vanwege J al vroegtijdig karakters gaat afdrucken, laten we J' alle print-statements van J “inslikken,” bijvoorbeeld door ze naar een ander bestand te leiden.) Eenvoudig is na te gaan dat J stopt als en slechts als J' 10,000 of meer karakters afdrukt. Als probleem (ii) beslisbaar zou zijn, zouden we via J' nu ook kunnen beslissen of J stopt. Dat is in tegenspraak met de onbeslisbaarheid van het stop-probleem, dus probleem (ii) is onbeslisbaar.

Einde.