Gebruik matrices

- In Graphics worden lineaire transformaties gebruikt
- Deze lineaire transformaties gerepresenteerd in matrixvorm
- Matrix**vermenigvuldiging** voor schalen, translaties en rotaties

Lineaire transformatie in 2D

Definitie 2.1.1: Een afbeelding T van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$ heet een lineaire transformatie als er een 2×2 matrix A bestaat zo dat

$$T(\mathbf{p}) = A\mathbf{p}$$

voor alle $\mathbf{p}$ in $\mathbb{R}^2$.

Matrix A beeldt vector $\mathbf{p}$ af op een nieuwe vector $\mathbf{p}' = A\mathbf{p}$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Lineaire transformatie in 2D

$$\mathbf{p}' = A\mathbf{p}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

$$x' = a_{11}x + a_{12}y$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y$$

Voorbeeld lineaire transformatie

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 3y \\ y' &= \ \ x + 4y \end{aligned}$$

Deze afbeelding wordt gerepresenteerd door 2×2 matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Opgave 6

Gegeven de volgende matrix: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Waar worden de volgende vectoren in overgevoerd?
   $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. Wat doet deze transformatie met het punt (x, y)?
3. Dezelfde vraag voor matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2D transformaties

In Graphics zijn meeste transformaties **lineair**:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

Deze **lineaire** transformaties gebruikt voor
`schaling`, `shear` en `rotatie`

Schaling in matrixvorm

Schaling

$$x' = s_x x, \qquad y' = s_y y$$

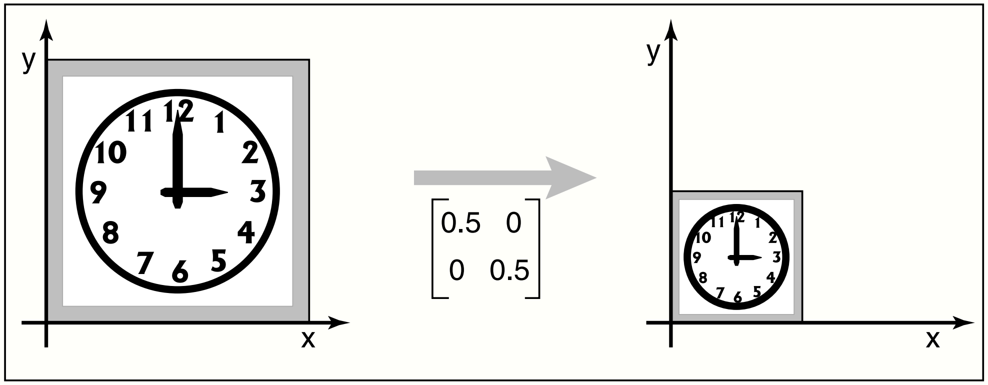
Schaling in matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x x \\ s_y y \end{pmatrix}$$

Schaling met schalingsmatrix $\mathbf{S}$:

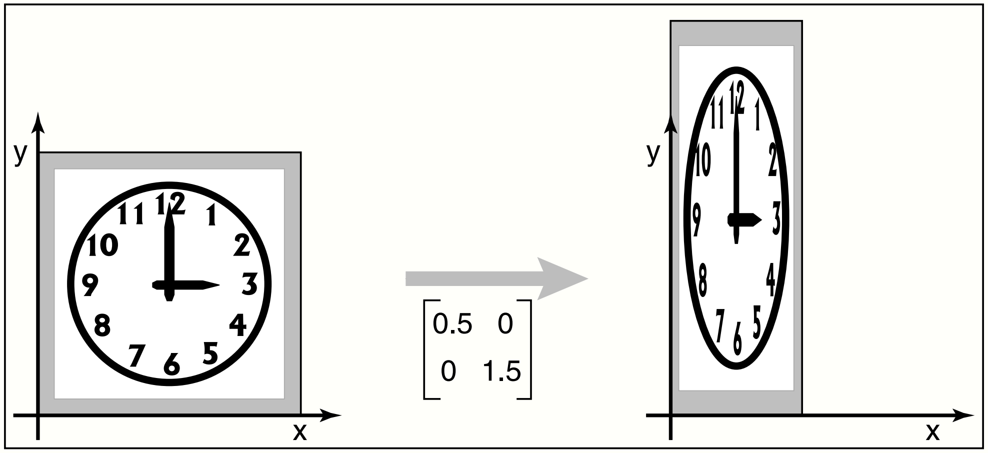
$$\mathbf{p}' = \mathbf{S}\mathbf{p}$$

Uniforme schaling in x en y



$$\begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Niet-uniforme schaling in x en y



$$\begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Shear in matrixvorm

Horizontale shear

$$x' = x + sy, \qquad y' = y$$

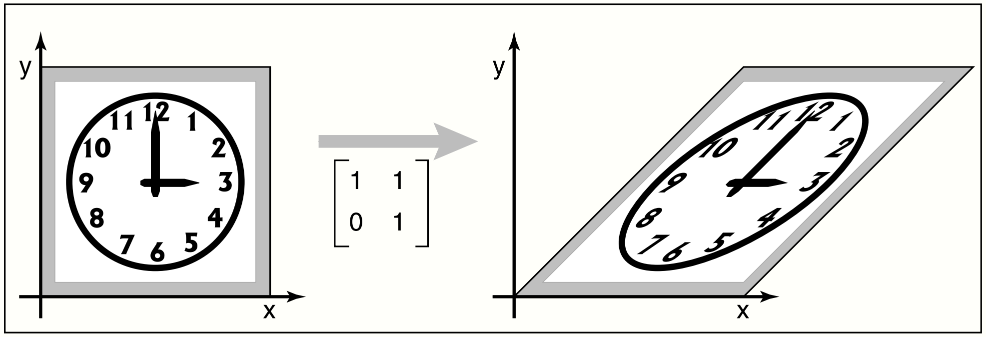
Horizontale shear in matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + sy \\ y \end{pmatrix}$$

Shear met matrix $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{S}\mathbf{p}$$

Horizontale shear



$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

`Verticale` lijnen gaan over in lijnen met hoek 45°

Eigenwaarden bepalen zonder rekenen

Gegeven: horizontale shear $\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Gevraagd: wat zijn eigenwaarden en eigenvectoren van deze afbeelding?

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Eigenwaarden en eigenvectoren shear

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- eigenvector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ met eigenwaarde $\lambda = 1$

Eigenwaarden bepalen met rekenen

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Karakteristieke vergelijking:

$$\mathbf{det} \begin{pmatrix} 1-\lambda & s \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, dus eigenvector is $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Shear in matrixvorm

Verticale shear

$$x' = x, \qquad y' = sx + y$$

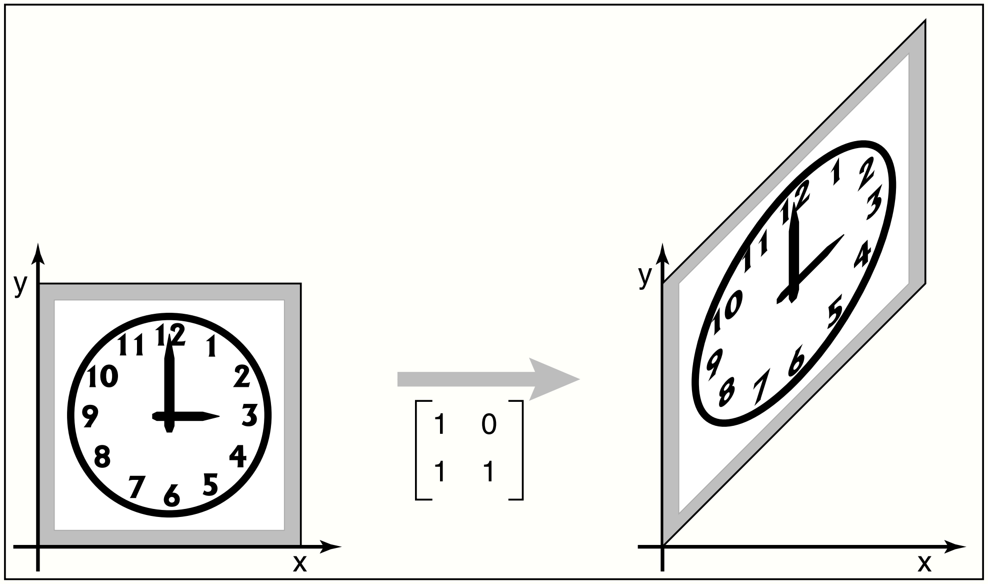
Verticale shear in matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ sx + y \end{pmatrix}$$

Shear met matrix $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{S}\mathbf{p}$$

Verticale shear



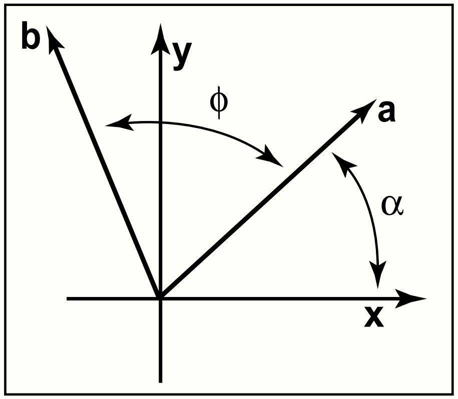
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

`Horizontale` lijnen gaan over in lijnen met hoek 45°

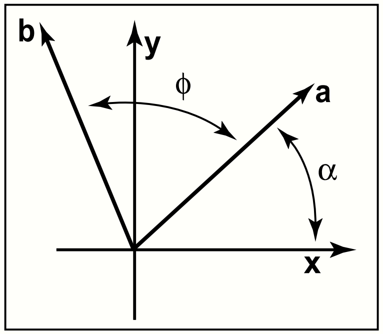
Rotatie in 2D

Gegeven: vector $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$

Gevraagd: vector $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$ na rotatie over hoek ϕ



Rotatie in 2D



$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\phi) \\ r\sin(\alpha+\phi) \end{pmatrix}$$

$$x_b = r\cos(\alpha+\phi) = r\cos\alpha\cos\phi - r\sin\alpha\sin\phi$$
$$y_b = r\sin(\alpha+\phi) = r\sin\alpha\cos\phi + r\cos\alpha\sin\phi$$

$$x_b = x_a\cos\phi - y_a\sin\phi$$

$$y_b = y_a\cos\phi + x_a\sin\phi$$

Rotatie in matrixvorm

Rotatie

$$x_b = x_a \cos\phi - y_a \sin\phi$$

$$y_b = x_a \sin\phi + y_a \cos\phi$$

Rotatie in matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Rotatie met matrix $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}\mathbf{p}$$

Rekenvoorbeeld 2D rotatie

Rotatie over 45°:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{pmatrix}$$

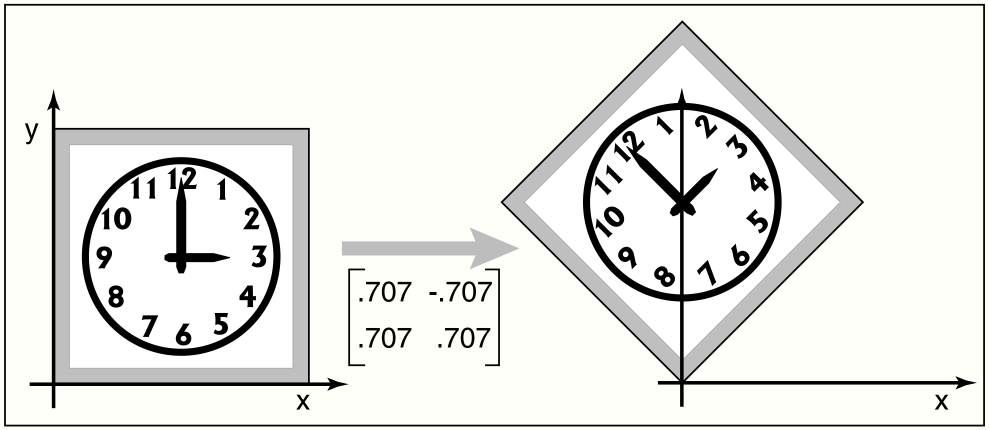
`Gegeven`: vector $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

`Gevraagd`: beeldvector $\mathbf{p}'$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{pmatrix}$$

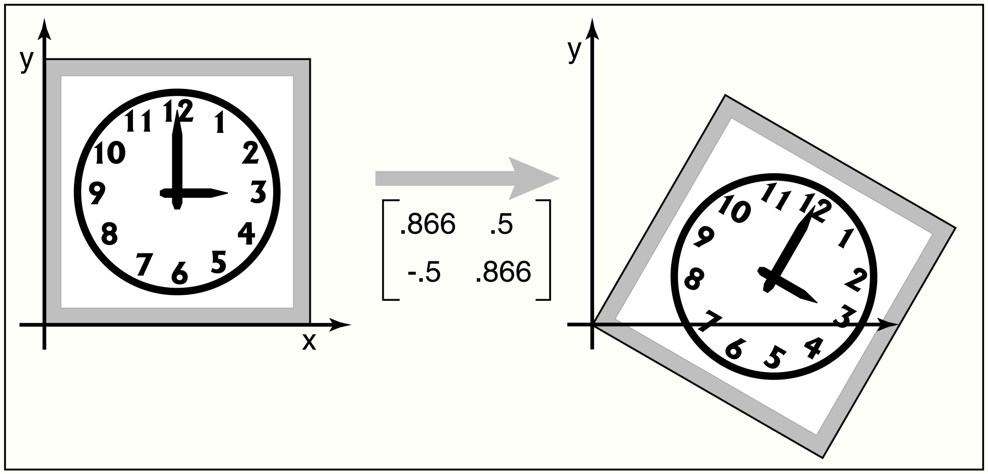
$\Rightarrow$ **tegen klok in**

Rotatie tegen klok in



$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{pmatrix}$$

Rotatie met klok mee



Rotatie met klok mee over hoek $-\pi/6$

$$\begin{pmatrix} \cos(-\pi/6) & -\sin(-\pi/6) \\ \sin(-\pi/6) & \cos(-\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.866 & 0.5 \\ -0.5 & 0.866 \end{pmatrix}$$

Definities: Orthonormaal en orthogonaal

- Een stelsel vectoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ zijn **orthogonaal** als voor elk tweetal vectoren uit dat stelsel geldt dat hun inproduct nul is.

- Een stelsel vectoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ zijn **orthonormaal** als voor elk tweetal vectoren uit dat stelsel geldt dat hun inproduct nul is en als elke vector lengte 1 heeft.

- Een vierkante matrix A heet orthogonaal als $A^T = A^{-1}$

Stelling: De determinant van orthogonale matrix is $+1$ of -1.

Rotatiematrix is orthogonaal

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

1. Kolommen van matrix zijn **orthogonaal**

   $\cos\phi(-\sin\phi) + \sin\phi\cos\phi = 0$

2. Elke kolom heeft lengte 1:

   $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$ en $(-\sin\phi)^2 + \cos^2\phi = 1$

$\Rightarrow$ rotatiematrix is **orthogonale matrix**

Eigenwaarden van 2D rotatiematrices

Bereken eigenwaarden van R. Voor welke waarden van θ zijn er eigenwaarden?

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Karakteristieke vergelijking:

$$\textbf{det} \begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0$$

Er zijn `wortels` als $\Delta = b^2 - 4ac = (2\cos\theta)^2 - 4 > 0$

Eigenwaarden van 2D rotatiematrices

wortels als $(2\cos\theta)^2 - 4 > 0 \Rightarrow \cos^2\theta \geq 1 \Rightarrow \cos\theta = \pm 1$

Dus alleen eigenwaarden en eigenvectoren in twee gevallen:

1. $\theta = 0, \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda = 1, Ix = x$

2. $\theta = \pi, \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \lambda = -1, -Ix = -x$

In andere gevallen **complexe eigenwaarden**

Opgave 7

1. Is de volgende matrix orthogonaal? $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

2. Wat zijn de beeldvectoren van $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ voor $\theta = \pi/6$?

3. Is A een rotatie voor $\theta = \pi/6$?

4. Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren om te bepalen wat deze transformatie doet

Spiegeling in matrixvorm

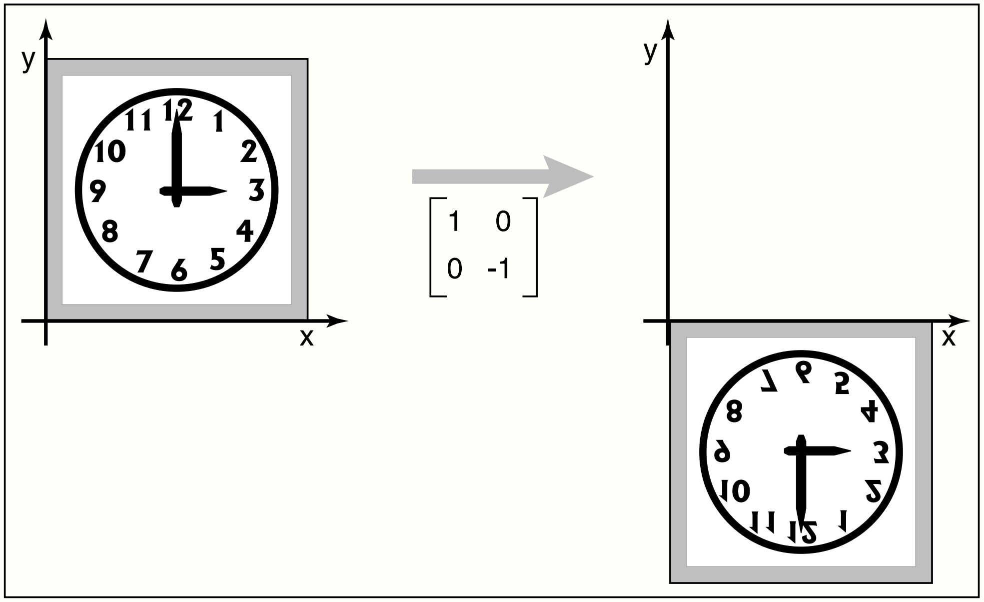
Spiegeling om x-as

$$x' = x, \qquad y' = -y$$

Spiegeling om x-as in matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Spiegeling om x-as



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Spiegeling in matrixvorm

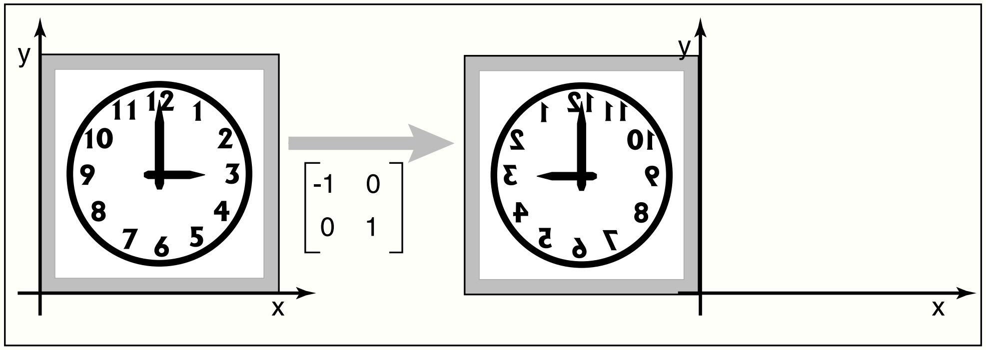
Spiegeling om y-as

$$x' = -x, \qquad y' = y$$

Spiegeling om y-as in matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

Spiegeling om y-as



$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spiegeling om lijn $x = y$

Spiegeling om lijn $x = y$

$$x' = y$$
$$y' = x$$

Spiegeling om lijn $x = y$ in matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Eigenwaarden van 2D spiegelingsmatrix

Bereken eigenwaarden van S.

$$S = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Karakteristieke vergelijking:

$$\textbf{det} \begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

Eigenwaarden $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -1$

Eigenwaarden van 2D spiegelingsmatrix

1. $\lambda_1 = 1, \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

   `eigenvector` op lijn $y = \tan\frac{\theta}{2} \,.\, x \Rightarrow$ **symmetrie-as**

2. $\lambda_2 = -1, \begin{pmatrix} \cos\theta + 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   `eigenvector` op lijn $x = -\tan\frac{\theta}{2} \,.\, y \Rightarrow$ **loodrecht op symmetrie-as**

Samenstelling van 2D transformaties

In Graphics vaak opeenvolgende transformaties op object

1. Eerst **schaling** $\mathbf{S}$: $\mathbf{p_2} = \mathbf{S}\mathbf{p_1}$
2. Dan **rotatie** $\mathbf{R}$: $\mathbf{p_3} = \mathbf{R}\mathbf{p_2}$

`Andere notatie`:

$$\mathbf{p_3} = \mathbf{R}(\mathbf{S}\mathbf{p_1}) = \mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{p_1} \text{ (eerst } \mathbf{S} \text{ en dan } \mathbf{R}\text{)}$$

Product van twee matrices

Gegeven matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

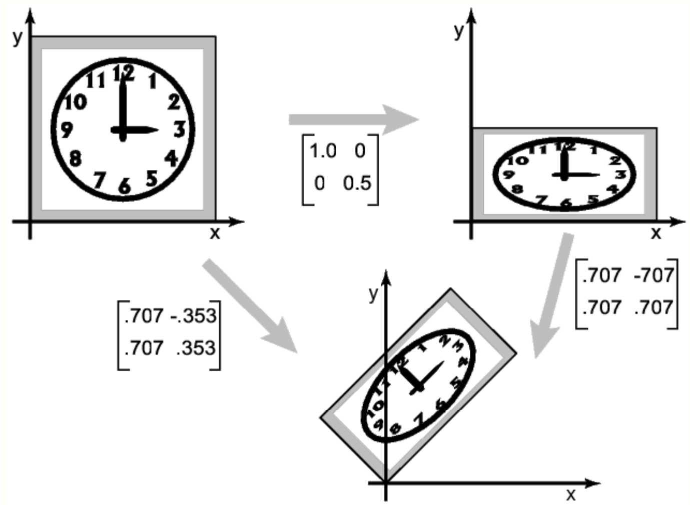
Het product AB is $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Wat is BA?

Het product BA is $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

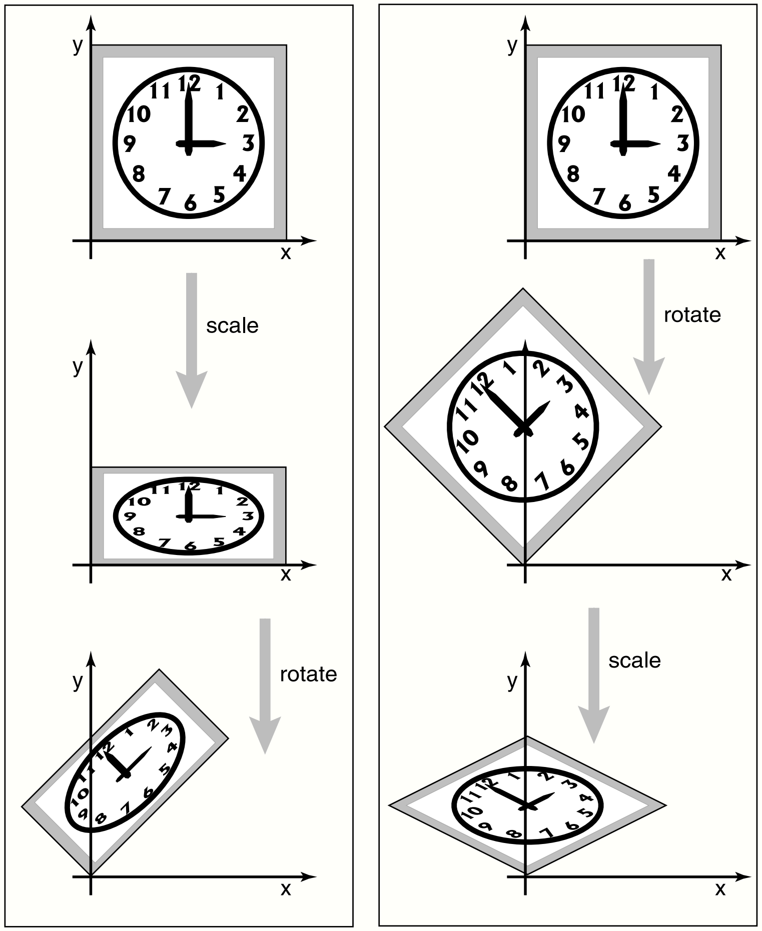
$AB \neq BA$, matrixvermenigvuldiging is **niet commutatief**

Uitvoeren van productmatrix



$$\begin{pmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.707 & -0.353 \\ 0.707 & 0.353 \end{pmatrix}$$

Volgorde transformaties maakt uit



Opgave 8

1. Wat is $\begin{pmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & -0.7 \\ 0.7 & 0.7 \end{pmatrix}$?

2. Wat is de samengestelde matrix van
   eerst **schaling**$(2, 3)$, dan **rotatie**(45°) en dan **shear-x**(0.2)?

3. Wat is de samengestelde matrix van
   eerst **shear-x**(0.2), dan **schaling**$(2, 3)$ en dan **rotatie**(45°)?

Antwoord opgave 8

1. $\begin{pmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & -0.7 \\ 0.7 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.7 \\ 0.35 & 0.35 \end{pmatrix}$

2. **schaling**$(2,3)$, dan **rotatie**(45°) dan **shear-x**(0.2)?
   $\begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & -0.7 \\ 0.7 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.4 & -2.1 \\ 1.4 & 2.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.68 & -1.68 \\ 1.4 & 2.1 \end{pmatrix}$

3. **shear-x**(0.2), dan **schaling**$(2,3)$ dan **rotatie**(45°)?
   $\begin{pmatrix} 0.7 & -0.7 \\ 0.7 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4 & -2.1 \\ 1.4 & 2.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4 & -1.82 \\ 1.4 & 2.38 \end{pmatrix}$

Opgave 9

1. Gegeven de volgende afbeelding:

$$\begin{aligned} x' &= \quad\quad y \\ y' &= x \end{aligned}$$

   Welke matrix hoort bij deze afbeelding? Wat is deze afbeelding meetkundig gezien?

2. Gegeven de volgende afbeelding:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= \quad\quad -y \end{aligned}$$

   Welke matrix hoort bij deze afbeelding? Wat is deze afbeelding meetkundig gezien?

3. Welke matrix correspondeert met afbeelding 1 gevolgd door afbeelding 2?
4. En andersom?
5. Wat doen de afbeeldingen in 3 en 4?

2D transformaties in matrixvorm

2D schaling: $\begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x x \\ s_y y \end{pmatrix}$

2D x-shear: $\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + sy \\ y \end{pmatrix}$

2D y-shear: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + sx \end{pmatrix}$

2D rotatie: $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\phi - y\sin\phi \\ x\sin\phi + y\cos\phi \end{pmatrix}$

Een **translatie** is een veel voorkomende transformatie in Graphics

Hoe moet dat in matrixvorm?

Translatie

Voor **translatie** hebben we `vector`-optelling:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$$

Hoe noteren we dat in matrixvorm?

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$$

Met **homogene** coördinaten matrixvermenigvuldiging

Homogene coördinaten

Voeg aan elk 2D punt $z = 1$ toe en voeg aan matrix rij en kolom toe:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Translatiematrix $\mathbf{T}$: $\mathbf{p}' = \mathbf{T}\mathbf{p}$

Rekenvoorbeeld 2D translatie

Translatie met $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Waar gaat $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ in over?

$$\mathbf{p}' = \mathbf{T}\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2D transformaties in homogene vorm

2D schaling: $$\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x x \\ s_y y \\ 1 \end{pmatrix}$$

2D x-shear: $$\begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + sy \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

2D rotatie: $$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\phi - y\sin\phi \\ x\sin\phi + y\cos\phi \\ 1 \end{pmatrix}$$

2D translatie: $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voorbeeld

Wat is matrix voor rotatie over 90° om het punt $(2, 1)$ (tegen de klok in)?

1. transleer zo dat rotatiecentrum op de oorsprong terecht komt
2. roteer om de oorsprong
3. doe de inverse translatie

De gevraagde transformatie is: $T(2, 1)R(90^\circ)T(-2, -1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

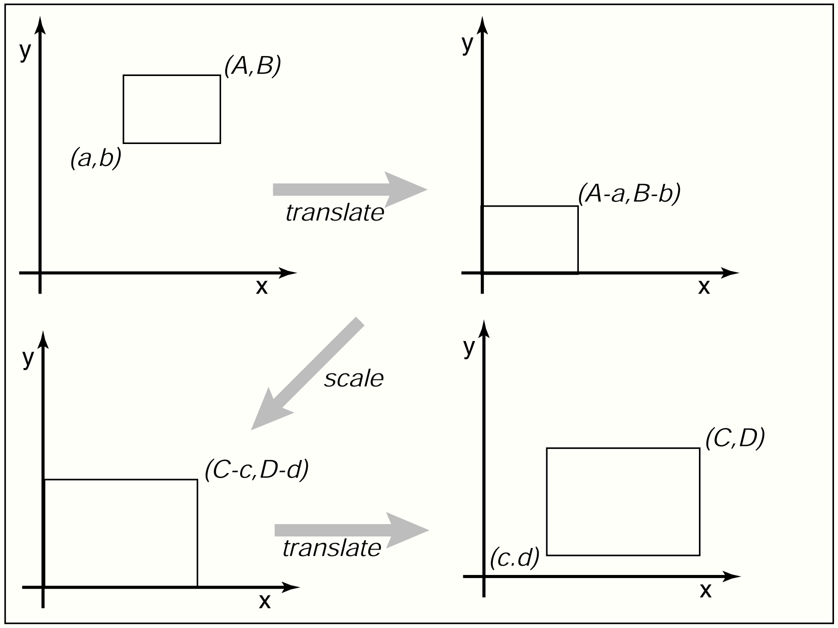
Waar gaat het punt $(3, 2)$ in over door deze transformatie?

Opgave 10

1. Wat is de matrix voor een spiegeling in de lijn $y = -x$?

2. Wat is de matrix voor een spiegeling in de lijn $y = -x + 5$?

2D window transformatie



Voer rechthoek $(a, b)(A, B)$ over in $(c, d)(C, D)$

rechthoek $(a, b)(A, B) \rightarrow (c, d)(C, D)$

1. **Transleer** punt (a, b) naar oorsprong

2. `Schaal` rechthoek naar juiste grootte

3. **Transleer** oorsprong naar (c, d)

transformatie $=$
transleer (c, d) schaal $(\frac{C-c}{A-a}, \frac{D-d}{B-b})$ transleer $(-a, -b)$

rechthoek $(a,b)(A,B) \to (c,d)(C,D)$

transleer (c,d) schaal $(\frac{C-c}{A-a}, \frac{D-d}{B-b})$ transleer $(-a,-b) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{C-c}{A-a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D-d}{B-b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{C-c}{A-a} & 0 & \frac{cA-Ca}{A-a} \\ 0 & \frac{D-d}{B-b} & \frac{dB-Db}{B-b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverse matrix

Definitie: De inverse matrix A^{-1} van een matrix A is de matrix waarvoor geldt: $AA^{-1} = I$

Voorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \text{ omdat}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverse van transformaties

1. **2D schaling**: $\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x x \\ s_y y \\ 1 \end{pmatrix}$

   Inverse: $\begin{pmatrix} 1/s_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/s_x x \\ 1/s_y y \\ 1 \end{pmatrix}$

2. **2D x-shear**: $\begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + sy \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

   Inverse: $\begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - sy \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

3. **2D rotatie**: $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\phi - y\sin\phi \\ x\sin\phi + y\cos\phi \\ 1 \end{pmatrix}$

   Inverse: $\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\phi + y\sin\phi \\ -x\sin\phi + y\cos\phi \\ 1 \end{pmatrix}$

4. **2D translatie**: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ 1 \end{pmatrix}$

   Inverse: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - d_x \\ y - d_y \\ 1 \end{pmatrix}$

Opgave 11

1. Waarom worden in Graphics bij transformaties homogene coördinaten gebruikt?

2. Welke transformaties zijn er nodig om een rechthoek met hoekpunten $(1, 1)$ (linksonder) en $(3, 3)$ (rechtsboven) om te zetten naar een rechthoek met hoekpunten $(0, 0)$ (linksonder) en $(4, 4)$ (rechtsboven)?

3. Geef de matrix T die deze transformatie representeert.

4. Wat is de inverse matrix van T?

5. Waar komt het punt $(2, 2)$ terecht als we de inverse van T hierop uitvoeren?