Inleveropgave 4: Massieve multi-agent systemen (concept)

Dit is het concept voor Schriftelijk 4. Som 1 is inmiddels afgekeurd en wordt vervangen door een iets eenvoudiger som die er op lijkt.

1. (Markovketens in discrete tijd.) 100 mieren bewegen zich tussen 4 nesten, startend vanuit het 1e nest. Van daaruit kunnen mieren naar het 2e of 3e nest, maar niet terug. Vanuit het 2e nest kunnen mieren naar buiten, maar niet terug. Vanuit het 3e nest kunnen mieren naar het 4e nest en terug.

   Teken zo nodig een rechthoek met linksboven Nest 1, rechtsboven Nest 2, en markeer éénrichtingsdoorgangen.

   (a) Hoeveel toestanden?

   Aanwijzing 1: toestanden kunnen worden gerepresenteerd als 4-tupels (voor 4 nesten) met niet-negatieve gehele getallen (aantal mieren per nest), maar ook als 5-tupels (4 nesten plus buiten).,

   Aanwijzing 2: raadpleeg zo nodig (weer) Sec. 1.6. On the distribution of balls in urns uit [1].[1]

   (b) Specificeer alle toestandovergangen, aannemende dat tijd zó fijnmazig is dat in elke toestandovergang slechts één mier kan overlopen.

   Aanwijzing: schrijf op hoe toestanden er uit zien en welke overgangen er mogelijk zijn. Er zijn slechts vijf soorten overgangen mogelijk. Zorg dat bij de specificatie van een overgang, of soort overgang, aan randvoorwaarden wordt voldaan, i.e., als je een mier van Nest 1 naar Nest 2 laat lopen, zorg er dan voor dat er dan ook tenminste één mier in Nest 1 aanwezig is.

   (c) Hoeveel klassen?

   Aanwijzing: een klasse kan ook worden gepresenteerd als een tupel, maar dan één korter dan een toestand. Hoeveel mieren zich afzonderlijk in Nest 3 in Nest 4 bevinden is dan namelijk niet meer interessant.

   (d) Hoeveel recurrente klassen?

   Aanwijzing 1: zolang zich mieren bevinden in Nest 1 of Nest 2 hebben we te maken met een doorgangstoestand of, in abstracte zin (als we niet tellen), een doorgangsklasse.

   Aanwijzing 2: herinner dat een klasse recurrent wordt genoemd zodra het geen doorgangsklasse is.

   (e) Hoeveel absorberende toestanden?

2. (Mierenkolonieoptimalisatie.)

   ⟨ tekst verwijderd ⟩

Einde opgave.

Literatuur

[1] Sheldon Ross. *A first course in probability.* MacMillan, first edition, 1976.

[1] In edities 7 e.v. van dit boek komt deze sectie niet meer voor, en is daardoor moeilijk in de bibliotheek [wie komt daar nog om boeken te lenen?] en online te vinden. Vandaar dat hier een link naar deze sectie wordt gegeven.

Antwoorden

Cijfer = 9 × (behaalde punten) / (totaal aantal punten) + 1.

1a, p. 1: Verdeel 100 mieren over 5 ruimtes, dat is: verdeel 100 knikkers over 5 vazen. I.h.a. kunnen op

$$\binom{n+k-1}{n}$$

verschillende manieren n ononderscheidbare knikkers over k onderscheidbare vazen worden verdeeld, dus het antwoord is

$$\binom{100+5-1}{100} = \binom{104}{100} = \frac{104!}{100!(104-100)!} = \frac{104 \cdot 103 \cdot 102 \cdot 101}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4,598,126.$$

Met dien verstande dat elke verdeling ook daadwerkelijk kan voorkomen: er worden dus geen niet-bestaande toestanden meegeteld. Dit is omdat alle 100 mieren starten in het eerste nest.

1b, p. 1: Een toestand kan worden gerepresenteerd als (a, b, c, d) met $0 \leq a, b, c, d$ en $0 \leq a+b+c+d \leq 100$.

$$\begin{array}{lll}
\text{Van ruimte 1 naar ruimte 2:} & (a-1, b+1, c, d), & a > 0; \\
\text{Van ruimte 1 naar ruimte 3:} & (a-1, b, c+1, d), & a > 0; \\
\text{Van ruimte 2 naar buiten:} & (a, b-1, c, d), & b > 0; \\
\text{Van ruimte 3 naar ruimte 4:} & (a, b, c-1, d+1), & c > 0; \\
\text{Van ruimte 4 naar ruimte 3:} & (a, b, c+1, d-1), & d > 0.
\end{array}$$

Andere representaties zijn ook mogelijk.

1c, p. 1: Mieren kunnen heen en weer lopen tussen Nest 3 en Nest 4. Dus toestanden zoals bijvoorbeeld $(15, 15, 20, 50)$ en $(15, 15, 21, 49)$ communiceren, i.e, kunnen in elkaar overgaan. In dit geval gaan deze twee toestanden direct in elkaar over. Ook toestanden als bijvoorbeeld $(15, 15, 20, 50)$ en $(15, 15, 27, 43)$ kunnen in elkaar overgaan middels meerdere stappen over verschillende tussentoestanden. Heen en terug.

Toestandovergangen als bijvoorbeeld $(15, 15, 20, 50) \rightarrow (14, 16, 20, 50)$ [een mier loopt van Nest 1 naar Nest 2] zijn niet omkeerbaar.

Per definitie wordt een klasse gevormd door met elkaar communicerende toestanden. In de huidige opgave kan een klasse daarom worden gerepresenteerd als (a, b, x, e) met $0 \leq a, b, x, e$ en $0 \leq a+b+x+e \leq 100$. Deze klassen vertegenwoordigt alle toestanden (a, b, c, d, e) zodanig dat $x = c + d$. Dus x is het aantal mieren in de vereniging van Nest 3 en Nest 4.

we verdelen 100 mieren over 4 ruimtes. Het aantal mogelijkheden hiervan is gelijk aan $103!/(100!3!) = 176,851$.

1d, p. 1: Er kan niet meer worden teruggelopen vanuit buiten, en ook niet vanuit de vereniging van Nest 3 en Nest 4. Dus verdeel 100 mieren over 2 ruimtes: de vereniging van Nest 3 en Nest 4 enerzijds en buiten anderzijds. Dat kan op 101 manieren: alle 100 in Nest 3/4 en één buiten, 99 in Nest 3/4 en twee buiten, etc. Of gebruik de "n knikkers in k vazen"-formule: $101!/(100!1!) = 101$.

1e, p. 1: Eén: die waarin alle mieren buiten zijn. Alle andere recurrente klassen bevatten namelijk meer dan één toestand omdat mieren dan heen en weer kunnen lopen tussen Nest 3 en Nest 4 wat verschillende toestanden geeft.