Inleveropgave 4: Massieve multi-agent systemen

Houd je aan de punten zoals vermeld in "Regeling toetsen" op de cursussite. Succes!

1. (Markovketens in discrete tijd, 12pt). Mieren bewegen zich van een nest naar buiten. Eenmaal buiten, blijven ze buiten. In het begin bevinden zich twee mieren in het nest en geen mieren buiten. Soms creëren twee mieren in een nest twee nakomelingen, en blijven zelf leven. Mieren buiten het nest gaan soms dood.

   (a) Hoe kunnen toestanden worden gerepresenteerd, i.e, kort worden opgeschreven in wiskundige notatie?

   Hint: het aantal mieren buiten moet ook zijn terug te vinden in de representatie.

   (b) Specificeer alle drie soorten toestandovergangen, aannemende dat tijd zó fijnmazig is dat binnen elke tijdseenheid slechts één gebeurtenis kan plaatsvinden.

   Hint: er zijn oneindig veel toestandovergangen, maak dus gebruik van variabelen.

   (c) Welke representeerbare toestanden zijn realiseerbaar, i.e., bereikbaar vanuit de begintoestand?

   (d) Welke toestanden kunnen worden bereikt vanuit een toestand met 0 mieren binnen? Dezelfde vraag voor 1 mier binnen. Zijn overgangen vanuit toestanden met minder dan 2 mieren binnen omkeerbaar? Waarom (niet)?

   (e) Teken een toestandengraaf (netwerk met pijlen tussen toestanden) met alle toestanden en alle toestandovergangen vanaf de begintoestand.

   Teken alleen toestanden met in totaal hoogstens 4 mieren. Als een overgang mogelijk is naar een toestand met meer dan 4 mieren, teken dan een pijl naar stippeltjes, om aan te geven dat daar de toestandengraaf doorloopt, maar niet verder wordt getekend.

   Kleur toestanden met 1 mier binnen geel, en toestanden met 0 mieren binnen rood.

   Aanwijzing: in totaal zijn er 15 toestanden en 26 pijlen, waarvan 5 eindigen in stippeltjes.

   (f) Geef de doorgangsklassen, recurrente klassen en absorberende toestanden.

   Waarschuwing: i.t.t. het knikkers-en-vazenmodel corresponderen klassen dit keer niet met ruimten die al dan niet leeg zijn.

2. (Mierenkolonieoptimalisatie, 12pt). Gegeven zijn de tabellen 1, 2, 3 (zie ommezijde). Verder $\beta = 0.5$ en $v(i,j) = 1/d(i,j)$.

   (a) Completeer Tabel 3.

   (b) Geef alle mogelijke toeren van een mier vanaf A bij exploitatie. Hoeveel toeren zijn dit?

   (c) Hoeveel toeren zijn er mogelijk bij exploratie?

   (d) Stel een mier staat op F en heeft A, B, C, E, en G al bezocht. Bereken

   $$\Pr\{J \text{ wordt bezocht} \mid A, B, C, E, G \text{ zijn al bezocht}\}.$$

   Zal de mier bij exploitatie J bezoeken? Waarom (niet)?

   (e) Bereken de kans dat de mier bij exploratie J bezoekt.

   (f) (Moeilijke vraag.) Bewering:

   > Exploitatietoeren worden ook het vaakst afgelopen bij exploratie.

   Becommentarieer.

Einde opgave.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A		0.9	8.4	5.9	2.3	7.6	3.8	1.8	9.5	6.1
B			8.2	6.4	0.6	9.4	9.0	4.2	7.1	9.6
C				1.6	1.6	3.3	4.6	3.5	6.8	7.9
D					3.5	7.0	8.8	4.1	5.0	9.4
E						5.6	5.9	2.4	3.2	7.7
F							6.3	5.4	6.8	2.4
G								1.3	3.0	2.7
H									3.7	9.5
I										9.1

Tab. 1: De lengte van een kant.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A		0.8	3.1	2.0	1.8	2.9	1.9	0.7	3.3	2.2
B			2.9	2.3	0.8	3.5	3.6	2.3	2.6	3.2
C				1.4	1.3	1.8	2.0	1.6	3.0	3.4
D					2.2	2.5	3.6	1.9	1.9	3.4
E						2.5	2.5	0.9	1.8	3.2
F							2.5	2.3	3.2	1.4
G								1.0	2.0	1.7
H									1.8	3.8
I										3.4

Tab. 2: De hoeveelheid feromoon op een kant.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A		0.845	1.068	0.825	1.192	1.050	0.970	0.528	1.069	0.894
B			1.015	0.908	1.067	1.144	1.202	1.118	0.976	1.030
C				1.123	1.025	?	?	?	1.153	1.213
D					1.170	0.948	1.212	0.940	0.849	1.108
E						1.053	1.028	0.577	1.011	1.152
F							0.999	0.993	1.231	0.912
G								0.885	1.147	1.039
H									0.934	1.234
I										1.128

Tab. 3: De aantrekkelijkheid van een kant.

Antwoorden

Cijfer = 9 × (behaalde punten) / (totaal aantal punten) + 1.

1a, p. 1: Toestanden kunnen worden gerepresenteerd als geordende paren (k, l) met $k, l \in \mathbb{N}_0$. Het getal k staat dan voor het aantal mieren binnen, en het getal l staat dan voor het aantal mieren buiten.

Punten: 1 voor geordend paar, 1 voor uitleg en randvoorwaarden op geordend paar.

1b, p. 1: Vanuit toestand (k, l), waarbij $k, l \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{array}{lll} \text{Geboorte:} & (k+2, l), & k \geq 2; \\ \text{Uitgang:} & (k-1, l+1), & k > 1; \\ \text{Sterfte:} & (k, l-1), & l > 1. \end{array}$$

Punten: 1 voor een antwoord in de goede richting, 1 helemaal goed.

1c, p. 1: Er is veel mogelijk, sterker nog, voor alle $k, l \in \mathbb{N}_0$ is de toestand (k, l) realiseerbaar. Er zijn dus geen onbereikbare of onmogelijke toestanden.

Argument: laat $k, l \in \mathbb{N}_0$ gegeven zijn en willekeurig. We zoeken naar een scenario waarin (k, l) kan ontstaan. Dat kan. Vanuit de begintoestand $(2, 0)$ is het mogelijk dat, door voortplanting, het aantal mieren binnen groeit tot $k + l$ of eentje meer (mieren komen er immers in tweetallen bij), waarna vervolgens l (of $l + 1$) mieren naar buiten lopen, zodat er k binnen blijven. Als er buiten vervolgens een mier te veel is dan is het mogelijk dat deze sterft, zodat het proces in de gewenste toestand (k, l) terechtkomt.

Het antwoord is dus

$$S = \{(k, l) \in \mathbb{Z}^2 \mid k, l \geq 0\}.$$

In het algemeen is het overigens helemaal niet vanzelfsprekend dat alle combinaties mogelijk zijn. Als mieren bijvoorbeeld niet kunnen sterven dan is de oplossing $S = \{k, l \in \mathbb{Z} \mid k, l \geq 0 \text{ en } 2 \leq k + l \text{ even}\}$. Immers, mieren worden per twee geboren. Dus in dit scenario is bijvoorbeeld $(7, 6)$ geen bereikbare toestand.

Punten: 1 voor het goede antwoord ("allemaal"), 1 voor een degelijk argument.

1d, p. 1: In ieder geval kan niet meer worden voortgeplant.

Nul mieren binnen betekent dat alle mieren buiten zijn. We krijgen dus een keten van toestanden waarbij in elke volgende toestand één mier sterft.

$$\cdots \to (0, k) \to (0, k-1) \to (0, k-2) \to \cdots \to (0, 1) \to (0, 0).$$

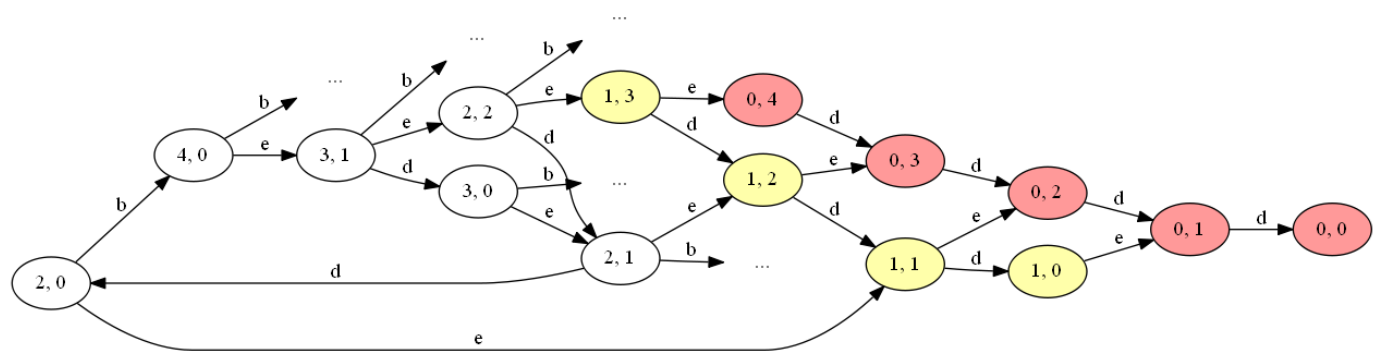
Eén mier binnen betekent dat er geen nieuwe mieren meer bij kunnen komen, alleen mieren buiten kunnen sterven, en die ene mier binnen op enig moment naar buiten gaat. We krijgen een keten van toestanden waarbij elke toestand $(1, l)$ kan overgaan in toestand $(0, l + 1)$ of toestand $(1, l - 1)$. Gecombineerd met de $(0, \cdot)$-toestandovergangen geeft dit

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \ldots & \to & (1, k) & \to & (1, k-1) & \to & (1, k-2) & \to & \ldots & \to & (1, 1) & \to & (1, 0). & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \ldots & \to & (0, k+1) & \to & (0, k) & \to & (0, k-1) & \to & \ldots & \to & (0, 2) & \to & (0, 1) & \to & (0, 0). \end{array}$$

Dit diagram laat eigenlijk al zien dat overgangen vanuit (k, l), $k < 2$ onomkeerbaar zijn. Het is ook te beredeneren door op te merken dat bij elke overgang vanuit (k, l), $k < 2$ het totaal aantal mieren danwel k afneemt. Omdat $k, l \geq 0$ kan op een gegeven moment het proces niet anders dan eindigen bij $(0, 0)$.

Punten: 1 voor het goede antwoord ("allemaal"), 1 voor een sluitende rechtvaardiging.

1e, p. 1: De graaf



Punten: 1 voor een gedeeltelijk juiste graaf, 1 voor een volledig juiste graaf.

1f, p. 1: Zolang er minstens twee mieren binnen zijn kan elke andere toestand met minste twee mieren binnen worden bereikt. De verzameling van alle toestanden met minste twee mieren binnen is dus een klasse. Het is tegelijkertijd een doorgangsklasse want het is mogelijk uit deze klasse te ontsnappen via de onomkeerbare toestandovergang $(2, l) \to (1, l+1)$. Het is mogelijk deze klasse in verzamelingennotatie op te schrijven, maar niet echt nodig omdat het zo ook wel duidelijk is.

Verder levert elk toestand (k, l), $k < 2$ een singleton doorgangsklasse $\{(k, l)\}$. Er zijn geen recurrente klassen. De toestand $(0, 0)$ is de enige absorberende toestand.

Punten: 1 voor het inzicht dat alles [behalve $(0, 0)$ dan] een doorgangsklasse is, 1 voor een volledig goed antwoord.

2a, p. 1: Er geldt

$$\text{aantrekkelijkheid van een kant} = \frac{\text{feromoon op die kant}}{(\text{lengte van die kant})^{\beta}} = \frac{f}{d^{\beta}}.$$

In de som is $\beta = 0.5$. Dus

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
C				1.123	1.025	$\underline{0.991}$	$\underline{0.933}$	$\underline{0.855}$	1.153	1.213

Punten: 1 juiste methode, 1 juiste uitkomst modulo afrondingsfouten.

2b, p. 1: Als we, vertrekkend vanuit A, steeds de aantrekkelijkste verbinding bewandelen naar een stad die nog niet is bezocht, komen we uit bij e volgende toer.

$$A \to E \to D \to G \to B \to F \to I \to C \to J \to H \to A.$$

In dit geval is er dus maar één optimale toer. (De keuze tussen C en G vanaf I was de meest kritieke.)

Punten: 1 juiste methode, 1 juiste uitkomst.

2c, p. 1: Alle aantrekkelijkheden zijn positief, dus als we bij A starten zijn er negen mogelijke alternatieven. Na een alternatief gekozen te hebben zijn er daarna nog acht mogelijke alternatieven, etc. Dus, als er volledig wordt geëxploreerd, zijn er $9! = 362,880$ mogelijke toeren.

Punten: 1 juiste methode, 1 juiste uitkomst.

2d, p. 1: Nee. De aantrekkelijkheid van de verbindingen met onbezochte steden D, H, I en J is respectievelijk 0.95, 0.99, 1.23, en 0.91. Dus de mier zal bij exploitatie I i.p.v. J bezoeken.

Punten: 1 juiste methode, 1 juiste uitkomst.

2e, p. 1:

$$\Pr\{J \text{ wordt bezocht} \mid A, B, C, E, G \text{ al bezocht}\} = \frac{0.91}{0.95 + 0.99 + 1.23 + 0.91} = 0.223.$$

Punten: 1 juiste methode, 1 juiste uitkomst modulo afronding.

2f, p. 1: Exploitatie kiest gretig, bijziend, en kortzichtig steeds de aantrekkelijkste kant. Maar misschien kan bij exploratie door toeval een knoop via een iets minder aantrekkelijke kant worden verlaten om dan ineens een veel aantrekkelijker route te volgen. Dus een soort opoffering op de korte termijn om op de lange termijn een betere route vinden. Dus de bewering is nog niet zo heel evident, en dus misschien zelfs gewoon onwaar.

Max 2pt. voor zinvolle observaties.