Inleveropgave 3: competitie en coöperatie

Houd je aan de punten zoals vermeld in "Regeling toetsen" op de cursussite. Succes!

1. (6pt) Bepaal de pure Nash-evenwichten (PNE), en de Pareto-optima (PO) van het spel met de volgende uitbetalingsmatrix.[1] Geef ook het symmetrisch verschil PNE Δ PO.

	A	B	C	D
a	0, 1	1, 2	2, 2	2, 2
b	0, 2	2, 2	2, 1	1, 2
c	0, 0	0, 2	2, 2	2, 2
d	1, 2	1, 1	0, 2	0, 0

2. (6pt) Bepaal de Nash-evenwichten (NE), en de Pareto-optima (PO) van het spel met de volgende uitbetalingsmatrix. Geef van alle NE ook het uitbetalingsprofiel.[2]

	A	B
a	4, 0	1, 5
b	2, 3	5, 2

3. IPD (6pt).[3] Twee spelers spelen herhaaldelijk het gevangenendilemma met de standaard uitbetalingen 0, 1, 3 en 5. (Zet zelf de getallen op de juiste plekken.)

   (a) De eerste speler bedient zichzelf van PAVLOV, de tweede van TFT (tit-for-tat). Beide spelers beginnen met verzaken. (Normaal beginnen PAVLOV en TFT met samenwerken, nu niet.) Geef de totale opbrengst van elke speler na 1000 ronden.

   (b) Geef de verwachte totale opbrengst na 1000 ronden als beide spelers zich bedienen van RANDOM-50%.

4. SIEPD Nowak & May (6pt).

   (a) Voor welke $\alpha \geq 0$ geeft de uitbetalingsmatrix van het SIEPD dezelfde Pareto-optima en Nash-evenwichten als de uitbetalingsmatrix van het gevangen-dilemma? (Om het makkelijker te naken moeten de optima en evenwichten ook op dezelfde plek in de matrix staan. We hebben het hier dus niet over de verzamelingen NE en PO.)

   (b) Geef voor de volgende configuraties aan of de centrumcel meewerkt in de volgende generatie. Het paar $U_{\max}$ staat daarbij voor de toestand van de cel met de hoogste opbrengst van alle cellen in de omgeving. (En, ja, elke cel hoort bij z'n eigen omgeving.)

C	D	C
C	D	C
C	C	D

$\alpha = 1.2$
$U_{\max} = (C, 7.3)$

C	C	C
D	C	D
C	C	D

$\alpha = 1.4$
$U_{\max} = (D, 7.0)$

5. (6pt) Voltooi één iteratie van de discrete replicatorvergelijking op $P = (0.4, 0.6)$ en

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. (6pt) In dit onderdeel mogen antwoorden worden gegeven door ze uit te lezen met behulp van software, bijvoorbeeld met de Mathematica demo zoals aangeboden op de Wolfram site, of met de Netlogo demo zoals aangeboden op de IAS site. In de Wolfram demo moet de mutation rate, μ, op nul worden gezet.

   Gegeven is de discrete replicatordynamiek tussen drie soorten met scorematrix

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Wat gebeurt er op de lange duur met de volgende drie verhoudingen? (Normaliseer eerst.) $q = (1, 1, 998)$; $q = (1, 0, 999)$; $q = (1, 1, 1)$.

   Is $q = (3, 2, 1)$ dus $p = (1/2, 1/3, 1/6)$ een stationair punt (i.e., dekpunt)? Zo ja, waarom, en is het dan een stabiel of een labiel stationair punt,—of geen van beide?

Einde opgave.

[1] Let op: PNE en PO zijn verzamelingen van actieprofielen. Een actieprofiel is een geordend paar van acties, met de actie van de rijspeler voorop. Een voorbeeld van een actieprofiel is (a, D).

[2] Bekijk het strategieprofiel $s = ((1, 0), (1, 0))$: beiden spelen hun eerste actie met kans 1. Het uitbetalingsprofiel van s is dan $p = (4, 0)$. Het uitbetalingsprofiel van, bijvoorbeeld, het strategieprofiel $s' = ((0, 1), (1/2, 1/2))$ is $p' = (3.5, 2.5)$. (Ga na!)

[3] IPD = iterated prisoner's dilemma: deelnemers bedienen zich van strategieën zoals TFT (tit-for-tat) of PAVLOV; IEPD = iterated evolutionary prisoner's dilemma = herhaald prisoner's dilemma in een populatie met proporties = replicatordynamiek, zie verder Flake pp. 297-300; SIEPD = spatially iterated evolutionary prisoner's dilemma: deelnemers zijn cellen met elke ronde een actie C of D = Nowak & May's model.

Antwoorden

Cijfer = 9 × (behaalde punten) / (totaal aantal punten) + 1.

1, p. 1: PNE = $\{(a, C), (a, D), (b, B), (c, C), (c, D), (d, A)\}$. PO = $\{(a, C), (a, D), (b, B), (c, C), (c, D)\}$. Makkelijk, want er gaat niets boven het uitbetalingsprofiel $(2, 2)$. Het symmetrisch verschil tussen deze twee verzamelingen is

$$\text{PNE} \,\Delta\, \text{PO} = (\text{PNE} - \text{PO}) \cup (\text{PO} - \text{PNE}) = \{(d, A)\} \cup \emptyset = \{(d, A)\}.$$

Punten:

- 2 juiste PNE.
- 2 juiste NE.
- 2 voor het juist vormen van het symmetrisch verschil uit de eerdere twee antwoorden.

2, p. 1: Gewoon naar de matrix kijken leert dat er geen pure NE zijn. Als de kolom-speler actie a speelt met kans y, dan is de gradient voor de rij-speler gelijk aan $6y - 4$; analoog is de gradient voor de kolom-speler gelijk aan $-6x + 1$. Beiden nul stellen levert het enige gemengde NE, het strategieprofiel $s = ((1/6, 5/6), ((2/3, 1/3))$ met uitbetalingsprofiel $p = (3, 2.5)$. Alle actieprofielen behalve (a, A) zijn Pareto-optima, want (a, A) wordt gedomineerd door (b, B).

Punten:

- 1 juiste NE.
- 1 juiste, bij zelf gegeven NE horende uitbetalingsprofielen.
- 1 juiste PO.
- 3 berekening.

3a, p. 1: PAVLOV werkt samen als (en slechts als) beide spelers in de vorige ronde dezelfde actie speelden; TFT echoot de tegenstander. We krijgen dan:

$$\begin{array}{llllll}
1. & D & C & D & D & \ldots \\
 & 1 & 0 & 5 & 1 & \ldots \\
2. & D & D & C & D & \ldots \\
 & 1 & 5 & 0 & 1 & \ldots
\end{array}$$

Dus na drie ronden begin alles zich te herhalen. In een cyclus verdienen beide partijen zes punten. Er gaan $\lfloor 1000/3 \rfloor = 333$ cycli in 1000 ronden en in ronde 1000 wordt dan (D, D) gespeeld, met opbrengst 1 voor beiden. Voor beiden is de totale opbrengst dus $333 \times 6 + 1 = 1999$.

Punten:

- 2 juiste aanpak
- 1 juiste uitkomst

3b, p. 1: Naar verwachting wordt elk actieprofiel even vaak gespeeld, dus naar verwachting is de gemiddelde opbrengst per ronde $(0 + 1 + 3 + 5)/4 = 2.25$. Dus ook na 1000 ronden. Dus voor beiden is de verwachte totale opbrengst na 1000 ronden gelijk aan $1000 \times 2.25 = 2250$.

Punten:

- 2 juiste aanpak

– 1 juiste uitkomst

4a, p. 1: De uitbetalingsmatrix van het gevangen-dilemma is gelijk aan.

	C	D
C	(3, 3)	(0, 5)
D	(5, 0)	(1, 1)

NE $= \{(D, D)\}$, PO $= \{(C, C), (C, D), (D, C)\}$.

De uitbetalingsmatrix voor het SIEPD is gelijk aan

	C	D
C	(1, 1)	(0, α)
D	(α, 0)	(0, 0)

Wil D een aantrekkelijk alternatief zijn, dan moet in ieder geval $\alpha > 1$. De Pareto-optima vallen dan samen met de Pareto-optima van het gevangen-dilemma. Echter, door de nullen in de uitbetalingsmatrix is (D, D) niet het enige NE meer, maar zijn (C, D) en (D, C) dat ook. (Ga na!) Dus voor geen enkele $\alpha \geq 0$ is de uitbetalingsmatrix voor het SIEPD qua Pareto-optima en Nash-evenwichten gelijk aan de uitbetalingsmatrix van het gevangenen-dilemma.

Punten:

- 1 voor het identificeren van de Pareto-optima in de α-matrix.
- 1 voor het identificeren van de Nash-evenwichten in de α-matrix als $\alpha > 1$.
- 1 voor het constateren dat, voor elke $\alpha \geq 0$, de Nash-evenwichten in de uitbetalingsmatrix voor het SIEPD niet samenvallen met de Nash-evenwichten in de uitbetalingsmatrix van het gevangen-dilemma.

4b, p. 1: De opbrengst voor de centrumcel is $6\alpha + 2 \cdot 0 = 6 \cdot 1.2 = 7.2$. Het paar $U_{\max}$ is gelijk aan $(C, 7.3)$. Er geldt $7.3 > 7.2$ dus de centrumcel gaat meewerken in de volgende generatie.

De opbrengst voor de tweede centrumcel is $5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 5$. Het paar $U_{\max}$ is gelijk aan $(D, 7)$. Er geldt $7 > 5$ dus de centrumcel gaat verzaken in de volgende generatie.

Punten (sorry nakijkers—'t is de 6pt doctrine):

- 1.5 voor diagram 1
- 1.5 voor diagram 2

5, p. 1: Relatieve scorematrix en initiële proporties:

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}.$$

Score per type:

$$S = R \cdot P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 0.8 \end{pmatrix}.$$

Ongenormaliseerde nieuwe proporties:

$$Q = \begin{pmatrix} 0.4 \times 1.8 \\ 0.6 \times 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.72 \\ 0.48 \end{pmatrix}.$$

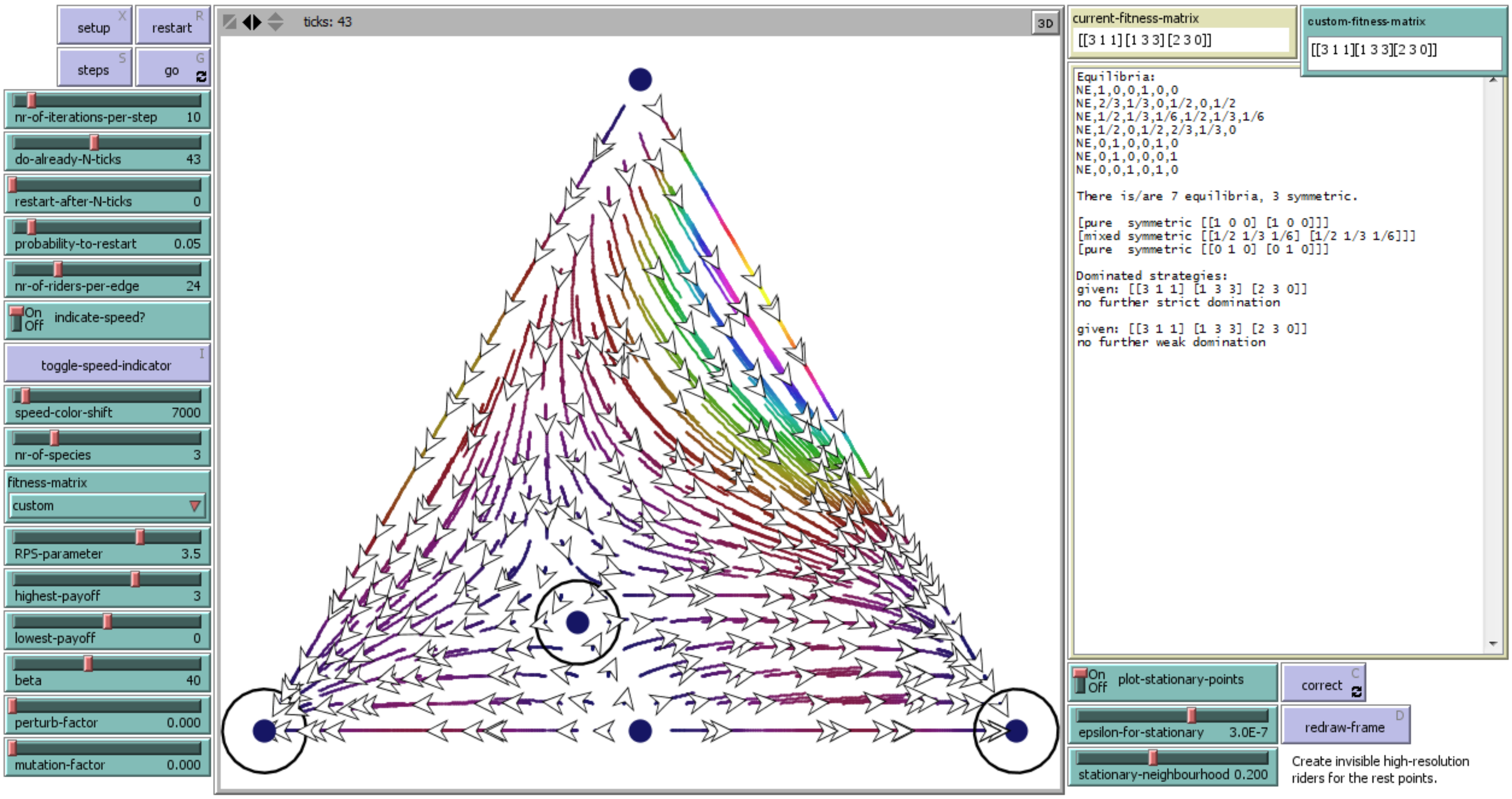
Genormaliseerde nieuwe proporties:

$$P = \frac{1}{\sum Q} Q = \frac{1}{0.72 + 0.48} \begin{pmatrix} 0.72 \\ 0.48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}.$$

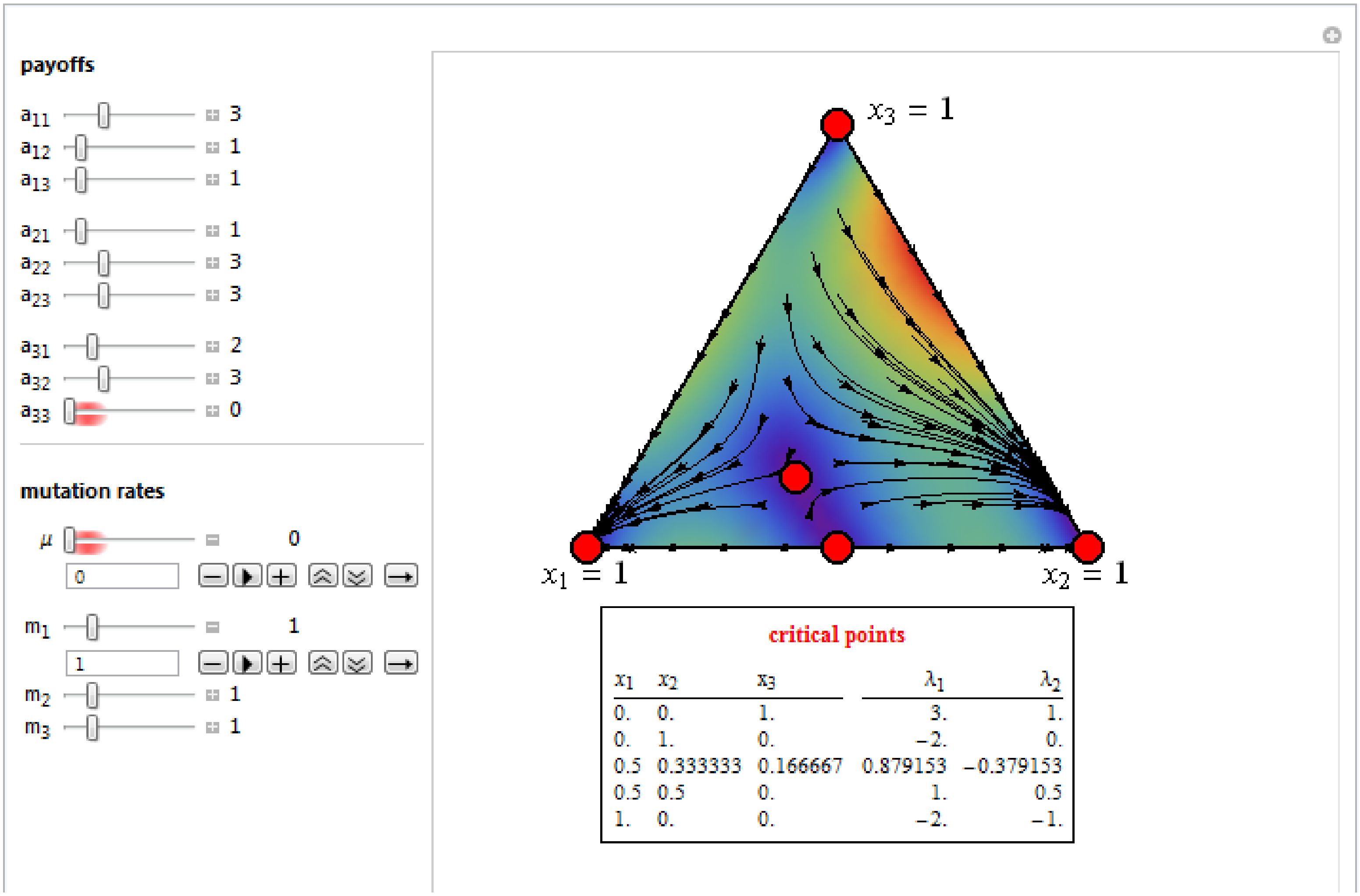
Punten.

- 2 voor berekening S.
- 2 voor berekening Q.
- 2 voor berekening nieuwe P.

6, p. 1: Fasediagram van de gegeven replicatordynamiek in Netlogo:



Fasediagram van de gegeven replicatordynamiek in Wolfram:



De verhouding $q = (1, 1, 998)$ convergeert naar $p = (0, 1, 0)$ [als je antwoord met $q = (0, 1000, 0)$ dan is dat ook goed]; de verhouding $q = (1, 0, 999)$ convergeert naar $p = (1, 0, 0)$; de verhouding $q = (1, 1, 1)$ convergeert naar $p = (0, 1, 0)$. Belangrijk is dat je opmerkt dat er een convergentieproces plaatsvindt, en dat de proporties waar naar toe wordt geconvergeerd, nooit worden aangenomen. Dit heeft te maken met het gegeven dat de in replicatordynamiek proporties vermenigvuldigd worden.

Het fasediagram suggereert dat ergens in de buurt van $p = (1/2, 1/3, 1/6)$ een stationair punt (dekpunt) ligt. Misschien is het p zelf:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Elke soort $2\times$ zo veel, dus de verhoudingen blijven gelijk, dus p is inderdaad een stationair punt. Dit moet je dus wel even controleren.

Uit het diagram lezen we af dat de dynamiek vanuit één richting ("NZ") aantrekt, en van een andere richting ("OW") afstoot. Het punt p is dus een stabiel noch labiel stationair. (Zo'n stationair punt wordt trouwens een zadelpunt genoemd.)

Punten.

– 2 voor aflezen limieten.

– 2 voor aflezen en analytisch (door berekenen) vaststellen dekpunt.

– 2 voor duiding dekpunt (stabiel noch labiel).