Inleveropgave 1: berekenbaarheid, fractals, en Langton's ant

– De sommen zijn ge-ordend van makkelijk naar moeilijk, met de toevoeging dat "moeilijkheid" een subjectief begrip is.

– Als iets waar is, leg dan zo kort mogelijk uit waarom. Als iets niet waar is, geef dan een zo eenvoudig mogelijk tegenvoorbeeld.

– Hou je aan "Regeling toetsen" op de cursussite.

– Deze opdracht werd gepubliceerd op za 20 feb 09.00. Antwoorden intypen op blackboard vanaf di 23 feb 23.59, deadline do 25 feb 23.59.

– Succes!

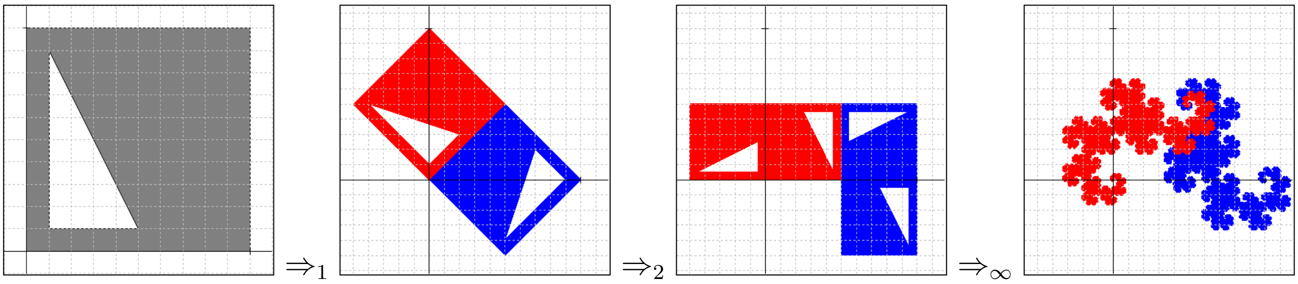

Fig. 1: Een IFS.

1. (5pt) Beargumenteer dat elke berekenbare functie kan worden geïmplementeerd door aftelbaar oneindig veel verschillende programma's.

2. (5pt) Een Turmite is Turing-volledig. Waar of niet waar? (Ik zou zeggen: zie Wiki.)

3. (5pt) Elke eindige string uit het alfabet $\{L, R\}$ geeft een andere versie van Langton's ant. Waar of niet waar: alle ants ontsnappen uit elke eindige rechthoek.

4. (12pt) Fig. 1 geeft de ontwikkeling van een IFS weer. (Zoals gebruikelijk is een driehoek uitgesneden om de oriëntatie van de beelden weer te geven.) Beschrijf het IFS in woorden als samenstellingen van lineaire afbeeldingen, en geef de functievoorschriften. Geef ook de dimensie van de voortgebrachte fractal.

5. (10pt) Twee IFSen met samenvallende beelden van het eenheidsvierkant brengen dezelfde fractal voort. Waar of niet waar?

   Toelichting: met "samenvallende beelden" wordt het volgende bedoeld: Als IFS1 opereert ("wordt losgelaten") op het eenheidsvierkant dan geeft dit een beeld. IFS2 geeft zo ook een beeld. Deze beelden kunnen hetzelfde zijn.

6. (10pt) Laat zien dat semi-beslisbaarheid op hetzelfde neerkomt als opsombaarheid.

   Aanwijzingen:

   – Begin met de definities er op na te slaan.
   – De makkelijkste kant is van opsombaar naar semi-beslisbaar. "Stel $j/0$ somt X op. We kunnen dan een programma $j'/1$ schrijven dat precies alle elementen uit X herkent, als volgt."
   – Omgekeerd begin je zo: "Stel, $j/1$ herkent X. We kunnen dan een programma $j'/0$ schrijven dat precies alle elementen uit X opsomt, als volgt.' Hint: laat j' $\mathbb{N}$ opsommen en de berekening van $j(n)$ starten als n verschijnt in de opsomming.

Einde opgave.

Antwoorden

Cijfer $= 9 \times$ (behaalde punten) / (totaal aantal punten) + 1.

1, p. 1: Voeg aan het oorspronkelijke programma dummy statement toe, zoals bijvoorbeeld `x = x;`, en herhaal dit.

Punten: 3 voor een juist inzicht; 2 voor een juiste uitwerking, in die zin dat er concreet wordt gemaakt hoe oneindig veel alternatieve programma's kunnen worden gemaakt die toch htzelfde doen.

2, p. 1: Waar. Het mogen schrijven op een oneindig rooster geeft meer mogelijkheden dan het schrijven op een oneindige tape.

Alleen zeggen dat een Turmite een Turingmachine IS, is niet genoeg, dat is slechts een bevestiging van het gevolg.

Punten: 1 voor een goed antwoord; 4 voor een goede uitleg.

3, p. 1: Niet waar: bv. L of LL zorgen ervoor dat de mier steeds linksaf slaat.

Punten: 1 voor een goed antwoord; 4 voor een goede uitleg.

4, p. 1: 1) half wortel twee schalen, dan 45 graden roteren; 2) half wortel twee schalen, dan 90+45 graden roteren, dan 1 naar rechts.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De dimensie van de limietfiguur is $d = \log(M)/\log(\alpha) = \log(2)/\log(\sqrt{2}) = 2$.

Punten: 4 voor verwoording, 4 voor de voorschriften, en 4 voor dimensie.

5, p. 1: Niet waar. Er zijn erg veel verschillende tegenvoorbeelden. Een mogelijk tegenvoorbeeld is het paar IFS1 en IFS2, waarbij IFS1 het eenheidsvierkant met 0.8 vergroot, en IFS2 vier kopiën van het eenheidsvierkant geeft, elk 0.4 vergroot, waarbij die vier vierkanten naast elkaar worden geplaatst, binnen het vierkant van IFS1.

De beelden van deze IFSen zijn identiek (namelijk het vierkant $[0, 0.8]^2$, maar de bijbehorende fractals niet. Immers, de fractal die voortgebracht wordt door IFS1 is het punt $(0, 0)$, terwijl de fractal die voortgebracht wordt door IFS2 een figuur is met dimensie $\log(M)/\log(\alpha) = \log(4)/\log(1/0.4) > 0$. De dimensie van de eerste fractal is nul, en de dimensie van de tweede fractal is groter dan nul, dus IFS1 en IFS2 brengen verschillende fractals voort.

Punten: 2 voor een goed antwoord; 4 voor een conceptuele uitleg; 4 voor een correcte technische uitleg.

6, p. 1: Stel $j/0$ somt X op. We kunnen dan een programma $j'/1$ schrijven dat precies alle elementen uit X herkent, als volgt. Als j' een getal n krijgt gaat het j uitvoeren en zal "ja" afdrukken als en alleen als n in de opsomming verschijnt. Op deze manier worden precies alle getallen uit X herkent.

Stel, $j/1$ herkent X. We kunnen dan een programma $j'/0$ schrijven dat precies alle elementen uit X opsomt, als volgt. j' gaat $\mathbb{N}$ opsommen. Als getal n verschijnt in de opsomming word de berekening van $j(n)$ gestart en de berekeningen van alle vorige $j(k)$, $k < n$, zo die al niet zijn gestopt, een stukje voortgezet. Als op enig moment $j(n)$ "ja" zegt, drukt j' het getal n af. Op deze manier worden precies alle getallen uit X opgesomd.

Punten: 2 voor het inzicht dat er twee implicaties moeten worden bewezen; 4 voor de constructie van links naar rechts; 4 voor de constructie van rechts naar links.