Inleveropgave 0: kardinaliteit en berekenbaarheid

Houd je aan de punten zoals vermeld in “Regeling toetsen” op de cursussite.

1. Beargumenteer: $2^{\mathbb{N}} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

2. De set $V \subseteq [0,1]$ is een variatie op de Cantorset, en bestaat uit punten die overblijven na het herhaald wegnemen van open middendelen uit het eenheidsinterval, te weten steeds het open middendeel dat loopt vanaf 40% tot 60%. Dus na één slag blijven twee intervallen over ter lengte 0.4, te weten $[0, 0.4]$ en $[0.6, 1]$, na twee slagen blijven er vier intervallen over ter lengte 0.16, te weten $[0, 0.16]$, $[0.24, 0.4]$, $[0.6, 0.76]$, en $[0.84, 1]$. Er geldt

$$V \text{ is overaftelbaar terwijl } P\{V\} = 0. \tag{1}$$

   Dus aan de ene kant bevat V ontzettend veel elementen, terwijl aan de andere kant de kans dat een willekeurig punt uit $[0,1]$ in V zit, gelijk aan nul is.

   Teken V's kam, analoog aan Cantor's kam, en beargumenteer (1).

   Aanwijzingen.

   (a) Je mag een foto maken van een tekening op papier en dat bestand aanhechten bij je antwoord op blackboard.

   (b) Gebruik het feit dat elementen uit V precies díe getallen zijn zonder een 4 of 5. Bijvoorbeeld $0.12673809186962132031 7 \in V$, want dit getal zit in het gedeelte waar je uitkomt als achtereenvolgens de volgende “afslagen” genomen worden: links(1), links (2), rechts (6), rechts (7), etc., terwijl $0.126780218686312057 \notin V$, omdat bij het decimaal 5, inmiddels al enkele niveau's diep, de “middenafslag” genomen wordt, en het getal op deze manier definitief buiten V geplaatst wordt. Dus decimalen 0, 1, 2 en 3 “sturen”' de ontwikkeling van het getal naar links, en decimalen 6,7,8 en 9 “sturen” de ontwikkeling van het getal naar rechts.

   Houd trouwens ook rekening met het gegeven dat getallen een oneindige decimale expansie kunnen bezitten.

   (c) Voor je “kans nul”-argument kun je het volgende experiment bekijken. Je hebt een tolletje met 10 sectoren (taartpunten) 0, 1, 2 ,3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

   > Experiment: Noteer “0,”. Draai vervolgens zonder stoppen het tolletje en noteer elke keer het cijfer waarop dit tolletje valt. Op deze manier krijgen we (de gebruikelijke decimale representatie van) een getal.

   Beschrijf de uitkomstenruimte (alle mogelijk uitkomsten), X, van dit experiment. Geldt $0 \in X$? En $1 \in X$? (En, ja, $0.9999999\ldots = 1$.)Bereken de kans dat de uitkomst na twee keer draaien in V ligt. Na tien keer draaien, na 100 keer draaien. Waar gaat dit naar toe?

3. Iedere overaftelbare deelverzameling van $\mathbb{R}$ is gelijkmachtig met $\mathbb{R}$. Waar of niet waar en waarom?

4. Sommige aftelbare verzamelingen zijn niet opsombaar. Waarom?

5. Beargumenteer de onbeslisbaarheid van het printprobleem. Nadat een programmeertaal J en een alfabet A zijn vastgesteld, kan dit probleem als volgt worden geformuleerd:

   > Bepaal voor een willekeurig programma $j/0 \in J$ en een willekeurig symbool $a \in A$ of j ooit a zal afdrukken.

Einde opgave.

Antwoorden

Cijfer = 9 × (behaalde punten) / (totaal aantal punten) + 1.

1, p. 1: Elke deelverzameling $A \subseteq \mathbb{N}$ correspondeert op een natuurlijke manier met precies één element uit $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, namelijk A's zogenaamde *karakteristieke functie*

$$f : \mathbb{N} \to \{0,1\} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{als } x \in A, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

De karakteristieke functie van A wordt trouwens meestal genoteerd als χ_A. Het begrip karakteristieke functie hoeft niet te worden genoemd in je antwoord. Max. 10 punten.

2, p. 1: V is overaftelbaar, bijvoorbeeld omdat een diagonaalargument kan worden toegepast op alle oneindige rijen over het alfabet $A = \{0,1,2,3,6,7,8,9\}$.

$P\{V\} = 0$ omdat de kans op een decimale representatie zonder 4-en en 5-en bij willekeurig prikken in $[0,1]$, gelijk aan nul is. En dat is weer omdat de kans op geen 4 of 5 als we een tolletje met 10 sectoren een onbeperkt aantal keren mogen draaien, gelijk aan nul is. En dat laatste is weer omdat de limietkans op geen 4 of 5 bij een eindig aantal keer draaien, naar nul gaat:

$$\lim_{n\to\infty} P\{ \text{ geen 4 of 5 } \mid n \text{ keer draaien } \} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{10}\right)^n = 0.$$

Elk onderdeel 10 punten: tekening V's kam, overaftelbaarheidsargument, “kans nul”-argument.

3, p. 1: Hangt van de continuümhypothese af. Als deze wordt aangenomen, dan waar, anders niet.

Max. 10 punten.

4, p. 1: Een mogelijk argument: er zijn overaftelbaar veel aftelbare verzamelingen (neem alleen al $2^{\mathbb{N}}$), en er zijn “slechts” aftelbaar veel opsombare verzamelingen. (Dit is zo omdat bij elke opsombare verzamelingen een of meer computerprogramma's horen die die verzameling opsomt.) Er blijven dus aftelbare verzamelingen over die nit opsombaar zijn.

De waarom-vraag suggereert dat er om een principiële uitleg wordt gevraagd. Echter, alleen maar definities van aftelbaarheid resp. opsombaarheid geven is niet genoeg.

Max. 10 punten.

5, p. 1: We reduceren het invoerloze stopprobleem naar dit probleem. Laat $j/0$ een willekeurig programma zijn waarvan moet worden bepaald of het stopt.

> j': voer j uit, en onderdruk alle uitvoer, bijvoorbeeld door het naar `/dev/null` om te leiden; druk a af

Eenvoudig is na te gaan dat j' het symbool a afdrukt als en slechts als j stopt. Omdat we hebben aangenomen dat het print-probleem beslisbaar is, bestaat er een programma p dat kan beslissen of j' ooit a afdrukt, en dus of j stopt. Dat laatste is in tegenspraak met de onbeslisbaarheid van het invoerloze stop-probleem.

Max. 10 punten.

Erratum

Helaas is een fout gemaakt bij de formulering van Opgave 2. Daar werd voorgesteld een variatie van de Cantor set te bekijken door steeds 20% van het midden weg te nemen. Zo kon je mooi werken met decimalen, i.p.v. met een voor 1e-jaars misschien vervelende ternaire representatie van reële getallen, zo was het idee. Er werd gesuggereerd dat op deze manier precies alle getallen zonder cijfers 4 en 5 overbleven.

Helaas is dat laatste niet waar. Met andere woorden: de verzameling die ontstaat door steeds 20% van het midden van overblijvende lijnstukken weg te nemen is een andere verzameling dan de verzameling van getallen zonder een 4 of 5 in de decimale expansie.

Hoe zie je dat beide verzamelingen anders zijn? Dit kan op minstens twee manieren: met een tegenvoorbeeld en met een principieel argument. Een tegenvoorbeeld laat, door een getal aan te wijzen dat in de ene verzameling zit maar niet in de andere, in één klap zien dat beide verzamelingen ongelijk zijn. Een principieel argument legt uit waarom beide verzamelingen zich anders ontwikkelen.

1. *Tegenvoorbeeld.* In de eerste ronde wordt het interval $(0.4, 0.6)$ verwijderd en dat zijn exact de getallen met een 4 of 5 als eerste cijfer na de komma. In ronde 2 wordt het interval $(0.16, 0.24)$ definitief van inclusie in V uitgesloten. Dus $0,1678787878787878 \notin V$ maar bevat evenmin een 4 of een 5.

2. *Principieel argument.* De verzameling die ontstaat door steeds 20% van het midden overblijvende lijnstukken weg te nemen, neem in het bijzonder steeds één middenstuk weg.

   De verzameling die ontstaat door 4-en en 5-en weg te nemen, ontstaat door in elke ronde meerdere lijnstukken weg te nemen:

   – In ronde 1 wordt 20% van het midden weggehaald van alle lijnstukken ter lengte 1, dus van $[0, 1]$. Op deze manier worden alle getallen met een 4 of 5 als eerste decimaal uitgesloten.

     Deel de overgebleven lijnstukken op in segmenten van 0.1. Dit levert acht segmenten op. (Ga dit na, bijvoorbeeld door dit even na te tekenen op een kladje.)

   – In ronde 2 wordt 20% van het midden weggehaald van alle segmenten. Op deze manier worden alle getallen met een 4 of 5 als tweede decimaal uitgesloten.

     Deel de overgebleven lijnstukken op in segmenten van 0.01.

   – In ronde 3 wordt 20% van het midden weggehaald van alle segmenten. Op deze manier worden alle getallen met een 4 of 5 als derde decimaal uitgesloten.

     Markeer de overgebleven lijnstukken in lengtes van 0.001.

   – Enzovoort.

   Graag had ik hier een mooi plaatje van getekend; helaas ontbrak het me aan tijd. De clou is dat verzameling 1 minder snel "tot stof vergruist" dan verzameling 2. (Hoeveel sneller kun je uitrekenen, maar dat voert hier te ver.) Gelukkig zijn beide verzamelingen gegeneraliseerde Cantor sets, zodat ze beiden overaftelbaar zijn en kansmaat nul bezitten. In die zin heeft het ook weinig consequenties voor de beantwoording. In de praktijk bleek dat de meeste mensen met verzameling 2 aan de slag gingen.

Met dank aan Lars Wolf en Gerard Tel.