Inleveropgave 0: kardinaliteit en berekenbaarheid

Houd je aan de punten zoals vermeld in “Regeling toetsen” op de cursussite.

1. Beargumenteer: $2^{\mathbb{N}} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

2. De set $V \subseteq [0,1]$ is een variatie op de Cantorset, en bestaat uit punten die overblijven na het herhaald wegnemen van open middendelen uit het eenheidsinterval, te weten steeds het open middendeel dat loopt vanaf 40% tot 60%. Dus na één slag blijven twee intervallen over ter lengte 0.4, te weten $[0,0.4]$ en $[0.6,1]$, na twee slagen blijven er vier intervallen over ter lengte 0.16, te weten $[0,0.16]$, $[0.24,0.4]$, $[0.6,0.76]$, en $[0.84,1]$. Er geldt

$$V \text{ is overaftelbaar terwijl } P\{V\} = 0. \qquad (1)$$

   Dus aan de ene kant bevat V ontzettend veel elementen, terwijl aan de andere kant de kans dat een willekeurig punt uit $[0,1]$ in V zit, gelijk aan nul is.

   Teken V’s kam, analoog aan Cantor’s kam, en beargumenteer (1).

   Aanwijzingen.

   (a) Je mag een foto maken van een tekening op papier en dat bestand aanhechten bij je antwoord op blackboard.

   (b) Gebruik het feit dat elementen uit V precies díe getallen zijn zonder een 4 of 5. Bijvoorbeeld $0.12673809186962132031\,7 \in V$, want dit getal zit in het gedeelte waar je uitkomt als achtereenvolgens de volgende “afslagen” genomen worden: links(1), links (2), rechts (6), rechts (7), etc., terwijl $0.126780218686312057 \notin V$, omdat bij het decimaal 5, inmiddels al enkele niveau’s diep, de “middenafslag” genomen wordt, en het getal op deze manier definitief buiten V geplaatst wordt. Dus decimalen 0, 1, 2 en 3 “sturen”’ de ontwikkeling van het getal naar links, en decimalen 6,7,8 en 9 “sturen” de ontwikkeling van het getal naar rechts.

   Houd trouwens ook rekening met het gegeven dat getallen een oneindige decimale expansie kunnen bezitten.

   (c) Voor je “kans nul”-argument kun je het volgende experiment bekijken. Je hebt een tolletje met 10 sectoren (taartpunten) 0, 1, 2 ,3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

   > Experiment: Noteer “0,”. Draai vervolgens zonder stoppen het tolletje en noteer elke keer het cijfer waarop dit tolletje valt. Op deze manier krijgen we (de gebruikelijke decimale representatie van) een getal.

   Beschrijf de uitkomstenruimte (alle mogelijk uitkomsten), X, van dit experiment. Geldt $0 \in X$? En $1 \in X$? (En, ja, $0.9999999\ldots = 1$.)Bereken de kans dat de uitkomst na twee keer draaien in V ligt. Na tien keer draaien, na 100 keer draaien. Waar gaat dit naar toe?

3. Iedere overaftelbare deelverzameling van $\mathbb{R}$ is gelijkmachtig met $\mathbb{R}$. Waar of niet waar en waarom?

4. Sommige aftelbare verzamelingen zijn niet opsombaar. Waarom?

5. Beargumenteer de onbeslisbaarheid van het printprobleem. Nadat een programmeertaal J en een alfabet A zijn vastgesteld, kan dit probleem als volgt worden geformuleerd:

   > Bepaal voor een willekeurig programma $j/0 \in J$ en een willekeurig symbool $a \in A$ of j ooit a zal afdrukken.

Einde opgave.