Uitwerkingen Tentamen Logica voor AI
deel I: Modale Epistemische logica
14 december 2005
11.00 - 13.00

1. Laat zien (bewijs) dat voor elk KD45 model, $\Box(\Box\varphi \to \varphi)$ (delayed reflexivity) geldig (valide) is.

Antw. 12 p: We tonen aan dat voor iedere $(x, y) \in R$ geldt dat $(y, y) \in R$. Daarmee volgt direct dat $\Box(\varphi \to \Diamond\varphi)$ hetgeen onder uniforme substitutie equivalent is aan $\Box(\Box\varphi \to \varphi)$. Zij gegeven dat $(x, y) \in R$ (*1). Uit serialiteit van KD45 volgt dat er een z is zodat $(y, z) \in R$ (*2). Omdat KD45 modellen transitief zijn, volgt uit (1) en (2) dat $(x, z) \in R$ (*3). Omdat KD45 modellen euclidisch zijn volgt uit (1) en (3) dat $(z, y) \in R$ (*4). Omdat KD45 modellen transitief zijn, volgt uit (2) en (4) dat $(y, y) \in R$.
Een correcte Hilbert-style afleiding mag ook, onder vermelding van soundness.

2. Een frame $F = (S, R)$ is deterministisch iff $(s, s') \in R$ and $(s, s'') \in R$ implies $s' = s''$. In woorden: vanuit elke wereld is er via R maximaal één wereld bereikbaar. Zoek (en geef) een formula (of schema) valide op alle *deterministische* frames maar niet op algemene Kripke frames. Geef bij je formule een tegenmodel voor validiteit op algemene Kripke frames.

Antw. 10 p: Het schema is $\Diamond\varphi \to \Box\varphi$. Tegenmodellen die laten zien dat dit niet geldt voor algemene Kripkemodellen zijn bijna triviaal.

3. Donald Rumsfeld heeft gezegd ”there are things we know we know, there are things we know we do not know, and there are things we do not know we do not know”. De suggestie die van zijn uitspraak uitgaat is dat dit drie verschillende fundamentele epistemische klassen zijn. In het bijzonder zou volgen dat met betrekking tot een gegeven propositie p er minstens drie verschillende epistemische situtaties kunnen bestaan: KKp, $K\neg Kp$, en $\neg K\neg Kp$.

   (a) Bewijs dat wanneer we kennis modelleren als S5 modale logica, deze formules niet drie verschillende epistemische klassen kunnen vertegenwoordigen.

   (b) Zijn het wel drie verschillende klassen wanneer de K wordt gemodelleerd als een KD45 modale operator? Leg je antwoord uit.

Antw. 2 x 8 p: Het antwoord is in beide gevallen nee. In zowel S5 als KD45 hebben we $KK\varphi \leftrightarrow \neg K\neg K\varphi$. Om aan te tonen dat de formules geen elkaar uitsluitende klasses vertegenwoordigen, is het voldoende om voor S5 en KD45 één richting van deze bi-implicatie te bewijzen (semantisch via eigenschappen van R of via Hilbert-style deduction). Zie de huiswerkopgaves.

4. We bekijken een kaartspel met drie spelers, speler 1, 2 en 3, en drie kaarten, kaart r, kaart w en kaart b. Bij het delen van de kaarten krijgt elke speler een kaart, ziet elke speler de kleur (r, w of b) van zijn kaart, maar ziet geen enkele speler de kleur van de kaarten van andere spelers. Dit alles is common knowledge. Wanneer hieronder gevraagd wordt naar formules, modelleer dan een bewering als ‘speler 1 heeft kaart r’ met de propositie $1r$, en noteer de kennisoperatoren van de 3 spelers als K_1, K_2 en K_3.

   (a) Bij de deling heeft speler 1 kaart r, speler 2 kaart w en speler 3 kaart b gekregen. Teken het $S^5_{(3)}$-model $\mathcal{M}$ dat de epistemische situatie beschrijft na het delen van de kaarten (in dit Kripke-model hoef je *niet* de relatie te tekenen die de common knowledge operator interpreteert). Geef de actuele wereld s aan met een vierkantje.

   Antw. 8 p: Het bekende hexa-plaatje.

(b) Is er in de situatie direct na delen verschil in wat 'everybody knows' en de 'common knowledge' van de spelers? Zo ja, geef een formule φ, waarvoor in de actuele wereld s geldt dat $\mathcal{M}, s \models E\varphi$, maar $\mathcal{M}, s \not\models C\varphi$. Zo nee, geef een bewijs in termen van het getekende model.

Antw. 8 p: Er is verschil. Formule: TBD

(c) Vervolgens laat speler 1 zijn kaart aan speler 2 zien, waarbij het common knowledge is dat dit gebeurt. Geef het resulterende model, en leg uit waarom het er zo uitziet.

Antw. 8 p: Het bekende hexa-plaatje, maar nu zonder de lijnen van agent 2.

(d) We kijken nu naar een variant waarbij het plaatsvinden van de actie uit onderdeel 4c geen common knowledge is. In het bijzonder kijken we naar het scenario waarbij speler 1 zijn kaart aan speler 2 laat zien, speler 3 ziet dat dit gebeurt, maar speler 1 en 2 niet zien dat 3 ziet dat zij dit zien. Geef een formule die waar is in de actuele wereld van de resulterende situatie, maar die niet waar is in de actuele wereld van de resulterende situatie van onderdeel 4c.

Antw. 8 p: $\neg[1][3][2](1r \wedge 2w \wedge 3b)$, of $\neg[2][3][2](1r \wedge 2w \wedge 3b)$, of ...

5. Onderzoek de geldigheid (validiteit) van de volgende schema's in (1) de local reasoning / cluster semantiek van Fagin en Halpern en (2) de fusion semantiek van Jaspars (voor de zwakke belief-operatoren in deze semantieken schrijven we hier gewoon de box ($\Box$)): (a) $\neg(\Box\varphi \wedge \Box\neg\varphi)$ en (b) $\neg\Box\neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\Box\neg\varphi \wedge \neg\Box\neg\psi)$. Geef tegenmodellen indien je antwoordt dat een eigenschap niet geldt en schets een eenvoudig bewijs indien je antwoordt dat een eigenschap wel geldt.

Antw. 4 x 5 p: TBD.