Werkcollegeopgaven behorende bij het college Inleiding Adaptieve Systemen
Cursusjaar 2016-2017

Opgave 13 van Hoofdstuk 2: Aftelbaarheid begint als volgt:

> Zij $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ een aftelbare oneindige rij van aftelbaar oneindige deelverzamelingen van de vorm
>
> $$A_i = \{\, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots \}$$
>
> voor $i \geq 1$.

De beschrijving van A_i klopt niet. In een verzameling kan elk element maar één keer voorkomen. Het is toegestaan om een verzameling als bijvoorbeeld $\{1, 2, 4\}$ te schrijven als $\{1, 2, 2, 2, 4, 4\}$, maar in feite is dat een omslachtige manier om de verzameling $\{1, 2, 4\}$ op te schrijven.

"Verzamelingen" waarin elementen meerdere keren voor kunnen komen bestaan, maar heten dan *multi sets*. Bijvoorbeeld, de multi-set $[1, 2, 2, 2, 4, 4]$ is ongelijk aan de multi-set $[1, 2, 4]$. In een multi-set doet de volgorde er niet toe. Dus $[4, 4, 2, 2, 2, 1] = [1, 2, 2, 2, 4, 4]$. "Verzamelingen" waarin elementen meerdere keren voor kunnen komen en hun volgorde er wel toe doet, heten *rijen*. Een rij kan eindig of aftelbaar oneindig zijn. Overaftelbaar oneindige rijen bestaan niet.

Verbeterde opgave:

Opgave 13 van Hoofdstuk 2: Aftelbaarheid.

1. Bekijk de verzameling $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Elk element uit deze verzameling is een functie van $\mathbb{N}$ naar $\{0, 1\}$. Een element f kan er bijvoorbeeld zo uitzien:

   $$f = \{\, (1, 1), (2, 1), (3, 0), (4, 1), (5, 0), (6, 1), (7, 0), (8, 0), (9, 0), (10, 0), (11, 1), (12, 0), \dots \}.$$

   Elk element uit $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ correspondeert met een oneindige bitstring. Zo correspondeert de functie f van hierboven bijvoorbeeld met de oneindige bitstring $110101000010\dots$.

   Zij $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ een aftelbare oneindige rij van elementen uit $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Bewijs, door de f_i onder elkaar te zetten in een oneindige "tabel," dat $\bigcup_{i=1}^{\infty} f_i$ aftelbaar is.

2. Bewijs, voorzover je dat nog niet hebt gezien of gedaan, met behulp van een oneindige tabel dat de collectie van alle naar rechts oneindige deelrijen uit $\{0, 1\}$, i.e., rijen van de vorm

   $$0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots$$

   overaftelbaar is.

3. Leg uit waarom de tabellen en resultaten in 1 en 2 niet met elkaar in tegenspraak zijn.

Antwoord. De tabellen zien er hetzelfde uit, maar hebben een verschillende functie. In de eerste tabel staan alle elementen uit de rij $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ die, *per definitie* aftelbaar is. Dus de eerste tabel is compleet. In de eerste tabel kunnen dan ook de individuele geordende paren uit $\bigcup_{i=1}^{\infty} f_i$ met de zig-zag methode worden afgeteld.

In de tweede tabel wordt Cantor's diagonaalmethode toegepast om te laten zien dat de verzameling van *alle* elementen uit $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ overaftelbaar is. In de tweede tabel doen we dus (tegen beter weten in) een poging alle elementen uit de verzameling $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ af te tellen, wat mislukt.